

# 集合組織を有する金属材料の降伏曲面に関する研究

細川 智生・金谷 輝人・谷本 雅・宮田 定彰\*

岡山理科大学工学部機械工学科

\*岡山理科大学大学院工学研究科

(1997年10月6日 受理)

## 1. 緒 言

金属材料の降伏条件については、等方材料として von Mises あるいは Tresca の条件式が用いられているが<sup>1)</sup>、一般に、金属材料はその製造過程において方向性が生じ異方性材料と考えられる。このような材料に対して Hill は von Mises の条件式を補正して異方性材料の降伏条件式を提案している<sup>2)</sup>。しかし、実際の実験結果ではいずれの条件式とも完全な一致は見られず、また、材料によって異なる挙動を示すことが知られている。したがって、塑性加工における応力やひずみの解析ではこれらいずれかの条件式を採用し結果に誤差が含有する事を了解の上で解析に利用されてきた。

一方、有限要素法など解析技術の進歩とコンピュータの発達により解析精度が向上し、それに見合うより高精度な降伏条件式および降伏に続く塑性変形の構成方程式を求める要求が高まってきた<sup>3)</sup>。そこで本研究ではまず塑性変形開始の条件すなわち降伏条件式について、金属材料を種々な方向の結晶粒の集合体であることに着目し、比較的研究の進んでいる単結晶のすべり変形理論を採用して、多結晶体の降伏条件式について検討を試みた。

## 2. 解析方法

### 2.1 応力およびひずみの座標変換

材料の外形を基準とした座標系の座標軸を  $X_1, X_2, X_3$  (応力成分を表す場合に  $X, Y, Z$  軸と表示する事を併用した) とし、また、結晶の主軸を  $x_1, x_2, x_3$  とし、結晶の座標系からみて  $X_i (i = 1, 2, 3)$  の方向余弦をそれぞれ  $(l_{i1}, l_{i2}, l_{i3})$  とする。また、個々の結晶の  $p$  番目のすべり系におけるすべり面の法線方向とすべり方向の方向余弦を結晶の座標系から見てそれぞれ  $(n_1, n_2, n_3)$  および  $(b_1, b_2, b_3)$  とする。材料に負荷される応力およびそれによるひずみを材料の外形を基準として  $\sigma_{ij}$  および  $\epsilon_{ij}$  ( $i = j$  の場合  $\sigma_{ii} = \sigma_i, \epsilon_{ii} = \epsilon_i, i \neq j$  の場合  $\sigma_{ij} = \tau_{ij}, \epsilon_{ij} = \gamma_{ij}$ ) とすると、 $p$  番目のすべり系のせん断応力  $\tau^p$  は結晶の臨界せん断応力  $\tau_c^p$  を越すことが出来ないため、

$$\tau_c^p \geq \tau^p = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sum_{k=1}^3 l_{ik} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{jk} b_k^p \quad (1)$$

によって表される。また、 $p$  番目のすべり系のせん断ひずみを  $\gamma^p$  とし、すべり系の総数を  $m$  とすると、材料外形座標におけるひずみは

$$\epsilon_{ij} = \sum_{p=1}^m \gamma^p \left( \sum_{k=1}^3 l_{ik} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{jk} b_k^p \right) \quad (2)$$

によって表される。

## 2.2 多結晶金属の変形モデル

多結晶金属の塑性変形つぎのようにモデル化する。

1) 各結晶粒は結晶塑性学でよく知られているようにすべり面上のすべり方向にのみすべり変形をする。ここで、すべり方向は  $+$  の逆方向が考えられるが、これらを別のすべり系と考える。このことにより、 $\gamma^p \geq 0$  とすることが出来る。すべり系はすべり面とすべり方向の組み合わせで面心立方晶と体心立方晶金属で異なり、FCC 金属ではすべり面は  $\{111\}$  面、すべり方向は  $\langle 110 \rangle$  方向で組み合わせは24種、また、BCC 金属ではすべり面は  $\{110\}$ 、 $\{112\}$ 、 $\{123\}$  面の3種、すべり方向は  $\langle 111 \rangle$  方向で組み合わせは96種存在する。

2) 各結晶粒の変形は Taylor および Hill が提案しているように、結晶粒が相互に拘束して変形するため、材料内部では三方から拘束を受け、各結晶粒のひずみ成分は平均のひずみ成分に等しいものとする。すなわち、(1) および (2) 式で応力成分はすべて未知であるが、ひずみ成分は平均値（材料全体のひずみ成分）に等しい。それに対して、薄板や材料の表面近傍では表面に垂直な方向の拘束がなくなり、応力は0、ひずみは任意となる。すなわち、応力成分は  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  は未知、また、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  となり、ひずみ成分は  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  は平均値に等しく、また  $\epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  は未知となる。

3) (1) 式は  $m$  個の不等式であり、(2) 式は6個の式に対して変数は  $m$  個あり、いずれの場合も解は無数の組み合わせが存在する。そこで、最大塑性仕事の原理および最小せん断ひずみエネルギーの原理を採用する<sup>4)5)</sup>。すなわち、(1) 式の解のうち塑性仕事

$$W = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (3)$$

の最大のものが最適解であり、(2) 式の解のうちせん断ひずみエネルギー

$$U = \sum_{p=1}^m \tau_c^p \gamma^p \quad (4)$$

の最小のものが最適解である。

## 3. 計算方法

多結晶体の各結晶粒が任意に分布しているとすると、結晶の対称性から、材料座標系の  $X_3$  軸の方向を結晶座標系の1つのステレオ三角内の方位で全てを代表出来る。そこで、 $X_3$

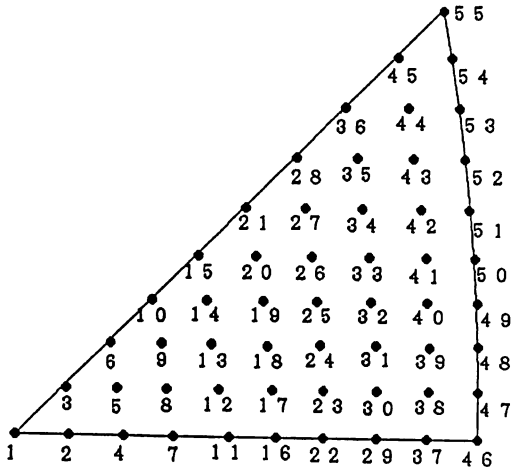


図1  $X_3$  方向 (板面の法線方向) ステレオ三角形上の分布と番号

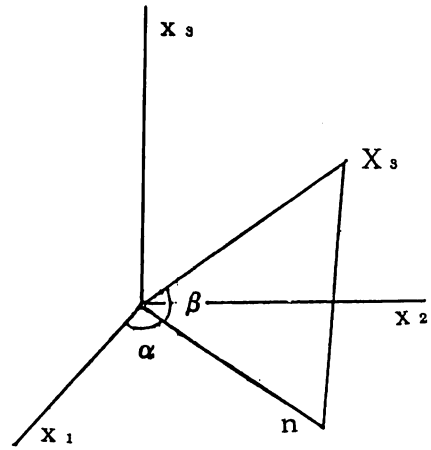


図2 結晶軸座標系における  $X_3$  方向

の方向を図1に示すように55種の方位で代表し、各方位は図2に示すように  $X_3$  方向を  $x_1 x_2$  面に投影した方向  $n$  と  $x_1$  軸のなす角を  $\alpha$ 、 $n$  方向と  $X_3$  方向のなす角を  $\beta$  として、 $\alpha$  と  $\beta$  を  $5^\circ$  間隔とした。また、この1つの  $X_3$  方位に対して  $X_3$  に垂直な面上で任意の方向と  $X_1$  軸のなす角  $\theta$  として、 $\theta$  を  $5^\circ$  間隔に72種を定めた。この場合  $X_1, X_2$  および  $X_3$  の方向余弦は

$$\begin{aligned}
 l_{31} &= \cos \alpha \cos \beta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{32} &= \cos \alpha \sin \beta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{33} &= \sin \alpha \cos \beta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{11} &= \sin \beta \cos \theta - \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \theta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{12} &= -\cos \beta \cos \theta - \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \sin \theta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{13} &= \cos \alpha \sin \theta / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \\
 l_{21} &= l_{32} l_{13} - l_{12} l_{33} \\
 l_{22} &= l_{33} l_{11} - l_{13} l_{31} \\
 l_{23} &= l_{31} l_{12} - l_{11} l_{32}
 \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで、 $X_1$  に垂直な面上の任意の方向として  $(l_{12}, -l_{11}, 0)$  方向を採用した。応力の計算は

$$\text{fp} = \sum_{k=1}^3 l_{1k} n_k^2 \sum_{k=1}^3 l_{1k} b_k^2$$

$$\begin{aligned}
 f_2^k &= \sum_{k=1}^3 l_{2k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{2k} b_k^p \\
 f_3^k &= \sum_{k=1}^3 l_{3k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{3k} b_k^p \\
 f_4^k &= \sum_{k=1}^3 l_{2k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{3k} b_k^p + \sum_{k=1}^3 l_{3k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{2k} b_k^p \\
 f_5^k &= \sum_{k=1}^3 l_{3k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{1k} b_k^p + \sum_{k=1}^3 l_{1k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{3k} b_k^p \\
 f_6^k &= \sum_{k=1}^3 l_{1k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{2k} b_k^p + \sum_{k=1}^3 l_{2k} n_k^p \sum_{k=1}^3 l_{1k} b_k^p
 \end{aligned} \tag{6}$$

とおくと、材料の中心部では(1)式は、 $f_1^p + f_2^p + f_3^p = 0$ であることを考慮して、

$$\begin{pmatrix} \tau_c^1 \\ \tau_c^2 \\ \cdot \\ \tau_c^p \\ \cdot \\ \tau_c^m \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} f_1^1 & f_1^2 & f_1^4 & f_1^5 & f_1^6 \\ f_1^2 & f_1^2 & f_1^4 & f_1^5 & f_1^6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^p & f_1^2 & f_1^4 & f_1^5 & f_1^6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^m & f_1^2 & f_1^4 & f_1^5 & f_1^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_z \\ \sigma_y - \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表すことが出来る。一方、薄板あるいは材料の表面層では

$$\begin{pmatrix} \tau_c^1 \\ \tau_c^2 \\ \cdot \\ \tau_c^p \\ \cdot \\ \tau_c^m \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} f_1^1 & f_1^2 & f_1^6 \\ f_1^2 & f_1^2 & f_1^6 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^p & f_1^2 & f_1^6 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^m & f_1^2 & f_1^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \tag{8}$$

となる。また、(2)式は

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_1^2 & \cdot & f_1^p & \cdot & f_1^m \\ f_1^2 & f_1^2 & \cdot & f_1^2 & \cdot & f_1^m \\ f_1^4 & f_1^4 & \cdot & f_1^4 & \cdot & f_1^m \\ f_1^5 & f_1^5 & \cdot & f_1^5 & \cdot & f_1^m \\ f_1^6 & f_1^6 & \cdot & f_1^6 & \cdot & f_1^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \cdot \\ \gamma^p \\ \cdot \\ \gamma^m \end{pmatrix} \tag{9}$$

となり表面層では、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & f_1^2 & \cdot & f_1^p & \cdot & f_1^m \\ f_1^2 & f_1^2 & \cdot & f_1^2 & \cdot & f_1^m \\ f_1^6 & f_1^6 & \cdot & f_1^6 & \cdot & f_1^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \cdot \\ \gamma^p \\ \cdot \\ \gamma^m \end{pmatrix} \tag{10}$$

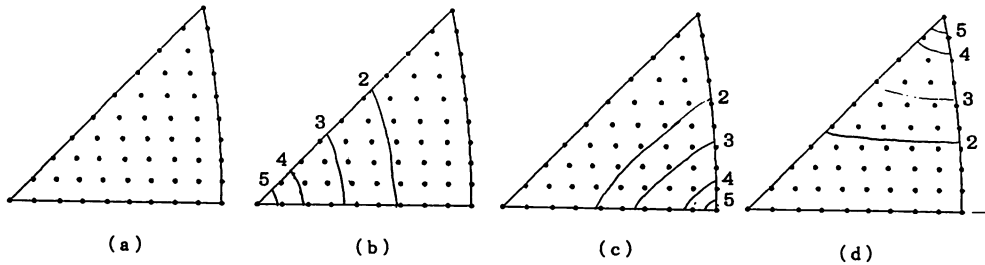


図3 計算で用いた集合組織の反転極点図

表1 図3の板面および圧延方向の反転極点図の組み合わせ

集合組織の番号		A	B	C	D	E	F	G
板面の法線方向	( $X_3$ )	(a)	(b)	(b)	(c)	(c)	(c)	(d)
圧延方向	( $X_1$ )	(a)	(b)	(c)	(b)	(c)	(d)	(c)

となり、各結晶粒の未知の応力およびせん断ひずみ成分は(7)または(8)式を制限条件として目的関数(3)式を最大にするか、または、(9)または(10)式を制限条件として目的関数(4)を最小にする事により得られる。これを全結晶粒について、図1に示した  $X_3$  軸のステレオ球面上での面積および集合組織による結晶の存在確率を考慮して重み付き平均によって多結晶体の降伏応力を決定した。

集合組織は板材を想定して  $X_3$  軸を板面、 $X_1$  軸を圧延方向として、それぞれの方向が図3に示す5種の反転極点図を仮して集合組織の影響を調べた。集合組織の可能な組み合わせを表1に示す。結晶の存在確率として近似的に両方向の反転極点図で表される確率の積と仮定した。

### 3. 解析結果および考察

表1の集合組織Aは板面および圧延方向が共に集合組織を持たない材料で等方性材料と考えられる。したがって、BCC および FCC 材料の集合組織Aの解析結果を Lode の応力パラメータで整理すると図4ようになる。この図で Tresca の降伏条件は横軸と一致し、von Mises の降伏条件を点線で表している。これらの図から明らかのように BCC 材料では von Mises の説に比較的近いが、FCC 材料では Tresca と von Mises の両説のほぼ中間の値を示している。このことは、すでに報告されている実験結果ともほぼ一致している。これに対して、薄板あるいは表面層では集合組織Aの場合でも、結晶の方位が等方的であっても拘束に方向性があるため Lode の応力パラメータで整理出来ない。

図5は集合組織を持たない材料で、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  で、さらに、 $\tau_{xy} = 0$  の場合の降伏応力値を横軸に  $\sigma_x$ 、縦軸に  $\sigma_y$  をとってプロットした図である。この図で Tresca の条件

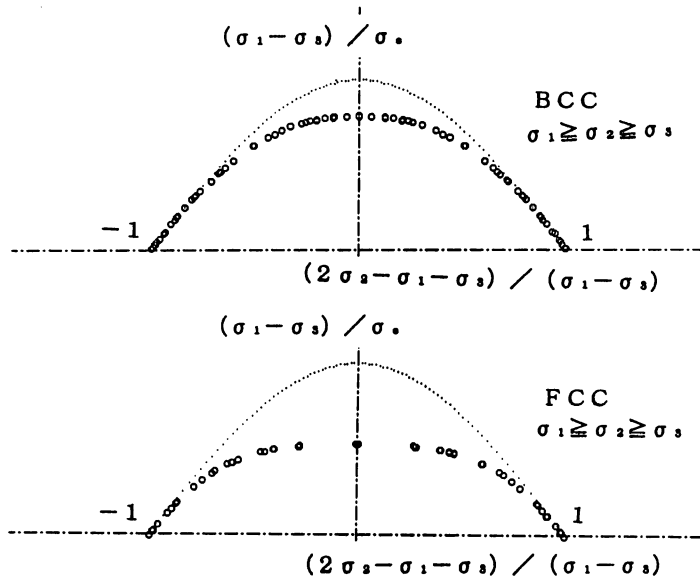


図4 Lode の変数で表示した等方性材料の降伏応力

式を一点鎖線で、また von Mises の条件式を点線で表した。これらの図からも明らかなように BCC 材料では von Mises の説に近く、FCC 材料では Tresca の説に近く、拘束の少ない表面層では内部より Tresca の説に近いことが解る。図6は集合組織を有する場合の一例であって、Tresca や von Mises の条件からは大きくずれ、X と Y 方向の降伏値にも差異が生じている。このような、異方性材料に対する降伏応力の近似式として Hill が提案した次式

$$\begin{aligned} \phi(\sigma_{ij}) = & F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ & + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

を用いて整理した<sup>2)</sup>。ここで F, G, H, L, M および N は異方性の強さを表すパラメータで、等方性材料では  $F = G = H = 1, L = M = N = 3$  である。(11) 式の異方性パラメータ F, G, H および N を解析データから回帰し、それを図5および図6に実線で記した。これらの図で見られるように異方性パラメータによってある程度の近似は出来るが、不完全で部分的には大きくずれていることが認められる。表2は種々な集合組織および結晶系の X 方向と Y 方向に引っ張り変形による降伏応力値は集合組織の状態により約10%程度の差異があり、また、X 方向と Y 方向の差異は数%程度である。

$\tau_{xy}$  の降伏条件におよぼす影響は図7に示す。この図は  $\tau_{xy} = 0$  で Tresca 条件式に最も近い FCC 材料の薄板の場合を示しているが、Tresca の条件式からは大きくずれ、von Mises または Hill の条件式を用いないと近似することが出来ない。

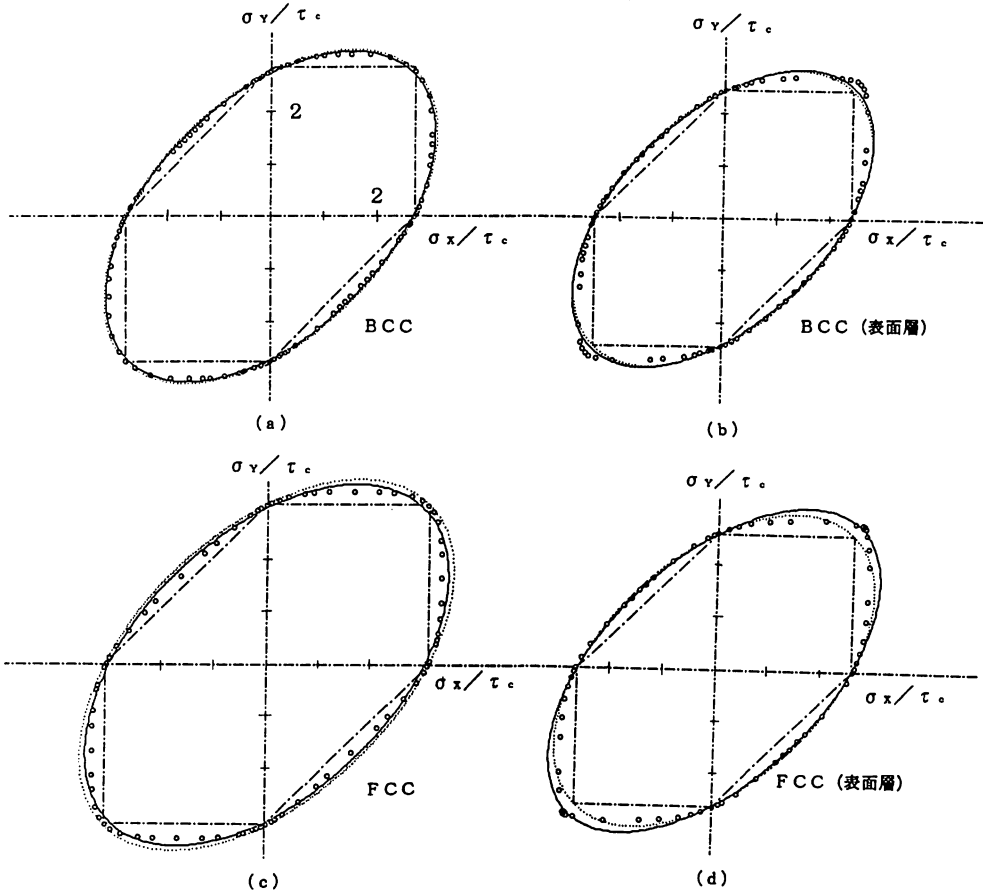


図5 集合組織が無い材料の降伏曲面  
一点鎖線；Tresca の条件 点線；von Mises の条件 実線；Hill の式 ○印；計算値

#### 4. 結 言

BCC 材料および FCC 材料について Taylor および Hill によって提案された塑性変形モデルを用いて集合組織を持つ金属材料について降伏応力値を解析して次のような結果を得られた。

1. 等方性材料の降伏条件式は BCC 材料ではほぼ von Mises の条件式に近いが、FCC 材料では両説のほぼ中間の条件式になる。
2. 薄板の降伏応力は普通の場合よりやや Tresca の説により近い降伏条件式を示し、降伏応力値も小さくなる。
3. 集合組織を有する場合には Tresca や von Mises の条件式からは大きくずれ、異方性パラメータを導入した Hill の式を用いる必要がある。
4. 特に、せん断応力成分がある場合には Hill の近似式を適用する必要がある。

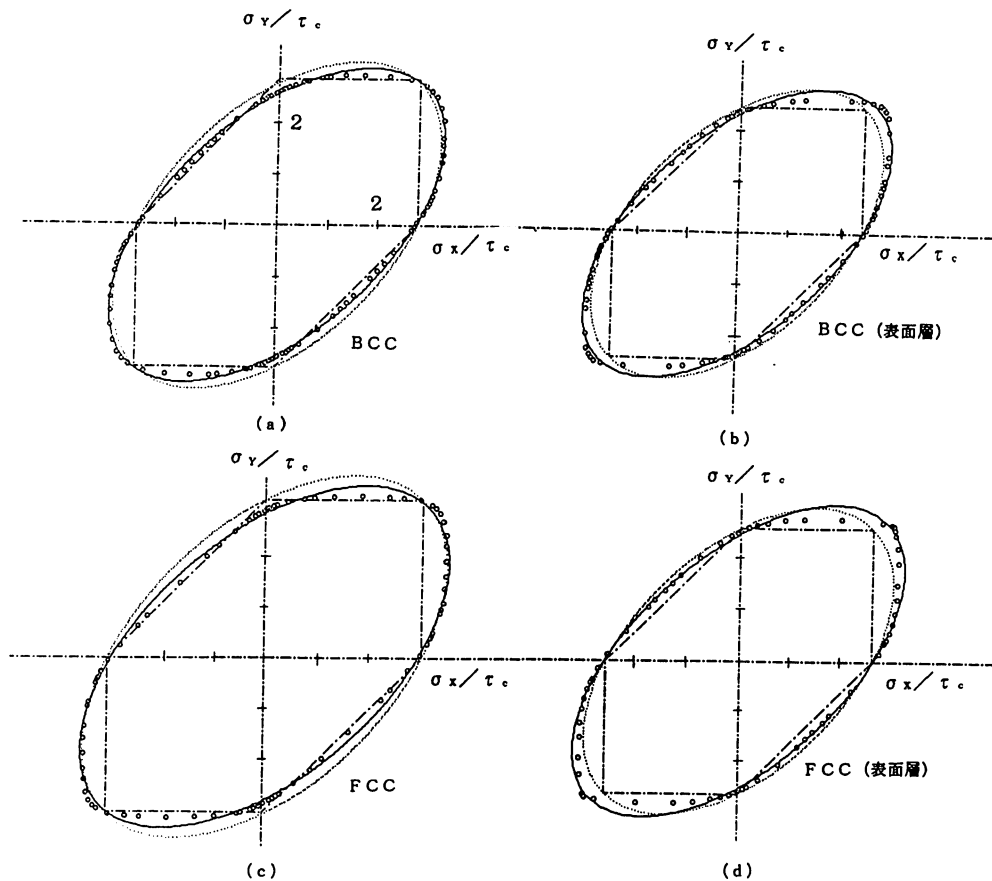


図6 集合組織Dの材料の降伏曲面  
 一点鎖線；Tresca の条件 点線；von Mises の条件 実線；Hill の式 ○印；計算値

表2 集合組織を有する材料の降伏応力値 ( $\sigma_e/\tau_c$ )

集合組織	B. C. C. 材料				F. C. C. 材料			
	中心部		表面層		中心部		表面層	
	X方向	Y方向	X方向	Y方向	X方向	Y方向	X方向	Y方向
A	2.75	2.75	2.42	2.42	3.07	3.07	2.62	2.62
B	2.63	2.54	2.35	2.28	2.91	2.82	2.54	2.47
C	2.71	2.77	2.41	2.41	3.01	3.06	2.65	2.62
D	2.70	2.59	2.45	2.35	3.06	2.89	2.64	2.55
E	2.73	2.83	2.46	2.50	3.05	3.19	2.67	2.75
F	2.78	2.84	2.45	2.57	3.07	3.19	2.67	2.80
G	2.79	2.88	2.48	2.39	3.14	3.23	2.71	2.61



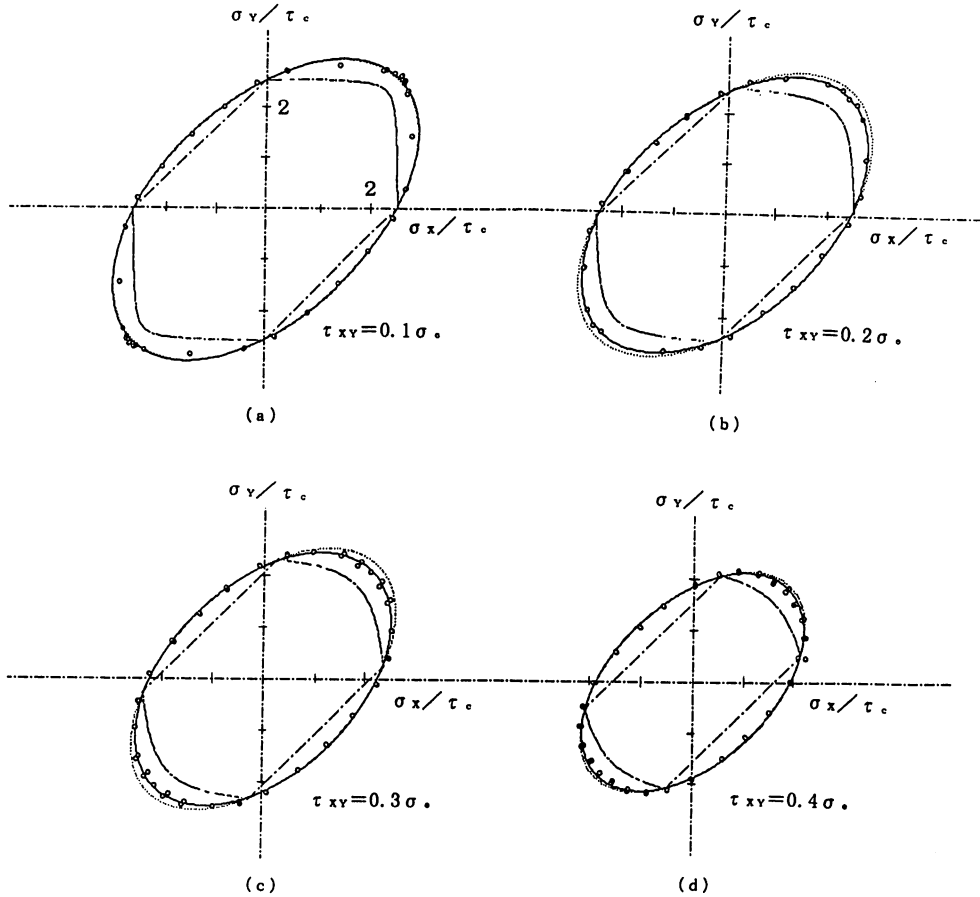


図7  $\tau_{xy}$  の降伏曲面のおよぼす影響 (集合組織A)  
 一点鎖線: Tresca の条件 点線: von Mises の条件 実線: Hill の式 ○印: 計算値

参考文献

- 1) 北川, 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, (1979).
- 2) R. Hill (鷲津ほか訳), 塑性学, 倍風館, (1954).
- 3) L. Anand and M. Kothari, J. Mech. Phys. Phys. Solids, **44** (1996), p525.
- 4) G. I Taylor, J. Inst. Metals, **62** (1925).
- 5) J. F. W. Bishop and R. Hill, Phil. Mag, **42** (1951), p1298.

## Study of Yield Surface on Metals with Texture

Norio HOSOKAWA, Teruto KANADANI, Tadashi TANIMOTO  
and Sadaaki MIYATA\*

*Department of Mechanical Engineering,*

*Faculty of Engineering*

*\*Graduate School of Engineering,*

*Okayama University of Science,*

*Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan*

(Received October 6, 1997)

Yield stresses are calculated using plastic deformation models that proposed by Taylor and Hill. The results are summarized as follows.

1. Yield surfaces on isotropic materials are nearly agreement with von Mises's hypothesis of plastic yield on Bcc metals. But yield surfaces of Fcc metals are in agreement with neither von Mises's nor Tresca's theory.
2. Yield surfaces on thin plates are slightly closer to Tresca's hypothesis of plastic yield. Yield stresses on thin plates are less than those on bulk materials.
3. Yield surfaces on anisotropic materials are approximated with Hill's equations. In case of existing shear stress, Hill's equations are available.