開口面アンテナ利得計算の簡易モデル

入　江　浩　一

岡山理科大学工学部情報工学科

（1997年10月６日　受理）

１．ま え が き

開口面アンテナ（反射鏡アンテナ）は，高い周波数領域でよい性能を発揮するので，マイクロ波帯の通信には広く用いられている。その指向性や利得の計算には高度な電磁界理論が用いられ，結果は簡単であるが，その過程は簡単なものではないことはよく知られている。

受信の場合には，到達した放射電力密度が一様と考えられるから，アンテナ受信電力はアンテナ開口面積に比例することは直観的にも容易に理解できる。しかし，送信の場合にはアンテナの大きさがアンテナの指向性や利得の性能にどう関係してくるのかの理解はそう直観的に容易ではない。理論的には「相反定理」により，受信の場合も送信の場合もアンテナの性質はまったく同じなのだが，これだけでは理解できたことにはならない。送信の場合，アンテナの大きさが大きくなるほどアンテナの指向性（狭い立体角範囲内に電波の放射を絞ることができる性能）は鋭くなり，その結果としてアンテナ利得（ある特定方向の遠地点での電界強度が，そのアンテナを使うことによって，無指向性アンテナ—全立体角に一様に電波を放射するアンテナ—の場合に比べて何倍になるかの性能）は大きくなる。

ここでは，ある１つの簡単なモデル［１］を用い，初等数学の範囲でかなりよい近似解が得られることを示す。ここで用いるモデルは図１に示すように，開口面（円を考える）の直径上の２点（各半径の２等分点）から全放射電力の1／2ずつが放射されるものである。

２．第１近似解

２.１　指　向　性

アンテナ開口面の直径を D とする。中心Ｏの左右対称の２点から全電力が放射されると考える。十分遠方での電磁界を考えると，２つの電波の行路差 d は，アンテナ正面方向から指向角 θ として

$$d = (D/2)\sin\theta \tag{1}$$

である。θ をゼロから少しずつ大きくしていくと d はゼロから増大する。ある角度 θ_0 で $d = \lambda/2$（λ：波長）となり，２つの電波の電界は逆相となり，打ち消されてゼロとなる。さらに θ を大きくしていくと，D の大きさがある程度大きいと，$d = (3/2)\lambda$，$(5/2)\lambda$，とな

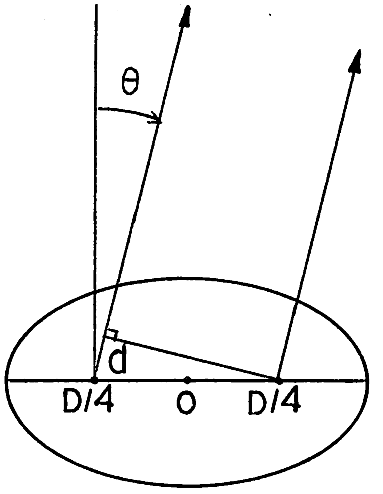


図1 開口面アンテナの指向性に関するモデル

り，電界がゼロとなる角度 θ が次々とあらわれる。正面方向の放射パターンをメインローブ，それに続くものを第1サイドローブ，第2サイドローブ，と呼ぶ。後述の理論式から，これらのサイドローブのピークは順次小さくなっていくことがわかる。そこで，以下のこの近似計算ではサイドローブを無視して，メインローブのみを考える。パターンの最初のゼロ点 θ_0 は式(1)より

$$\sin\theta_0 = \lambda/D \tag{2}$$

となる。通常，$\lambda/D \ll 1$ である。(逆に，この関係が成立するところでないと開口面アンテナの存在価値はない。例えば，BS の受信アンテナでは，$D = 50$ cm, $f = 12$ GHz ($\lambda = 2.5$ cm) であれば $\lambda/D = 1/20$ である。) この条件の下では式(2)は

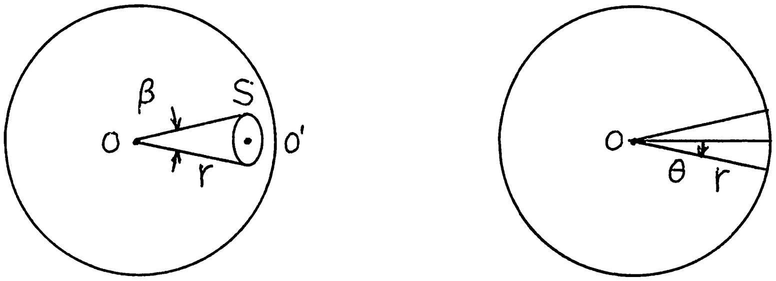
$$\theta_0 = \lambda/D \tag{3}$$

としてよい。θ_0 の理論値は後に示す。式(3)は次の重要なことを意味する。

「周波数が同じならアンテナが大きいほど，アンテナが同じなら周波数が高いほど電波は狭い角度範囲に集中して放射される。」

2.2 利　　得

半径 r ($r \gg D$, 中心：O) の球面を考える。中心から立体角 β (β：小) でカットされる球面の部分を円S (中心：O') と近似する ($r \rightarrow \infty$ でないとこの面は平面とならない)。O—O' を含む平面でこの球面をカットして得られる円を考える(図2)。円Sの面積 A は，立体角の定義から



(a)　球面　　　(b)　球面を 0-0' を含む平面カットした円

図 2　開口面アンテナからの放射の立体角とその断面 2 次元角の関係

$$A = \beta r^2$$

である。一方，図 2 (b)の平面図形で考えると，立体角 β に対応する角度 θ を図のごとく定めると，円 S の半径は $r\theta$ である。よって

$$A = \pi (r\theta)^2$$

と書ける。この両式から A を等しいとおいて

$$\beta = \pi\theta^2 \tag{4}$$

となり，この式(4)は 3 次元の立体角と 2 次元の角度の関係である。

さて，まづ，θ_0 に対応する立体角 β_0 内で（メインローブ内で）電波の強さは一様であると考える。アンテナ利得の定義は，無指向性アンテナに比べてどの程度特定の狭い立体角範囲に電波を集中させるかであるから

$$G \equiv 4\,\pi/\beta_0$$

である。これに式(4)，(3)の関係を用いて

$$G = 4\,(D/\lambda)^2 \tag{5}$$

となる。G の理論値は $(\pi D/\lambda)^2$ であるから [2]，式(5)と比較すると係数が 4 と π^2 の差である。この差は，メインローブ内で電波の強さを一様と仮定したことに由来したことが大きいと考えられる。

3．第2近似解

3.1 指　向　性

式(1)より，任意の θ についての2つの電波の位相差 ϕ は

$$\phi \equiv 2\,\pi d/\lambda \equiv (\pi D/\lambda)\sin\theta \tag{6}$$

である。よって遠方点での規格化合成電界は

$$\begin{aligned}\sin\omega t+\sin(\omega t+\phi) &= (1+\cos\phi)\sin\omega t+\sin\phi\cos\omega t\\ &= \sqrt{2(1+\cos\phi)}\sin(\omega t+\psi)\\ &\quad ,\tan\psi=\sin\phi/(1+\cos\phi)\end{aligned} \tag{7}$$

電力密度では

$$P = 2(1+\cos\phi) \tag{8}$$

となる。式(8)より，$P=0$ となるのは $\phi=\pi$ であるから，再び式(6)より

$$\sin\theta_0 = \lambda/D$$

であり。前に求めた結果と一致する。電力密度が1/2となる角度(指向性における電力半値幅）については，式(8)において，

$\phi=0$ で $P=4$，よって式(8)で $P=2$ とおいて

$$2 = 2(1+\cos\phi_{1/2})$$

より $\phi_{1/2}$ を求めると，$\phi_{1/2}=\pi/2$，さらに式(6)より

$$\sin\theta_{1/2} = \lambda/(2D) \tag{9}$$

が得られる。$\theta_{1/2}$ の理論値は後述する。

3.2 利　　　得

メインローブのパターンを式(8)で近似する。メインローブの平均電力は，θ_0 に相当する ϕ が π であるから，

$$(1/\pi)\int_0^{\pi} 2(1+\cos\phi)\mathrm{d}\phi$$

で計算され，結果は2である。すなわち，ピークは平均値の2倍である。式(5)では平均値を用いていることに注意すれば，2倍のピークを考慮すると

$$G = 8(D/\lambda)^2 \tag{10}$$

となり，理論値との差は係数が8と π^2 である。

4．指向性の理論値との比較

指向性の理論値は

$$E(\theta)/E_{\max} = 2\mathrm{J}_1\{(\pi D/\lambda)\sin\theta\}/\{(\pi D/\lambda)\sin\theta\} \tag{11}$$

である。[3]

$$X = (\pi D/\lambda)\sin\theta \tag{12}$$

とおいて，X の関数として指向性パターンを計算できる。X から D/λ をパラメータとして具体的な実際の θ の数値を決定できる。

(a) 最初のゼロ点

$\mathrm{J}_1(X) = 0$ よりベッセル関数表から（または，例えば，2分法による非線形方程式の数値解法により）$X = 3.83$ が得られる。これと式(12)から

$$\theta_0 = 1.22(\lambda/D) \tag{13}$$

これを近似値の式(3)と比較すると係数が1と1.22の違いである。

(b) 電力半値幅

式(11)で $E(\theta)/E_{\max} = 1/\sqrt{2}$ となる X を求めればよい。解くべき非線形方程式は

$$2\sqrt{2}\mathrm{J}_1(X) = X \tag{14}$$

となる。解くには例えば2分法を用いる。結果は $X = 1.61634$ となり，式(12)より

$$\theta_{1/2} = 0.5145(\lambda/D) \tag{15}$$

となる。これと近似値の式(9)を比較すると係数が0.5と0.5145の違いで非常によい近似値といえる。

(c) メインローブのパターン

理論値は X を独立変数として式(11)，すなわち，$2\mathrm{J}_1(X)/X$ を計算する。近似値は式(7)と(6)，また，最大値を1に規格化して $\sqrt{\{1+\cos(X)\}/2}$ となるが，これは3角関数の公式により $\cos(X/2)$ となる。

計算結果を図3に示すが，$X < 2$ では両者よく一致している。理由は X の小さいところでは両者のべき級数展開の式は

$$2\mathrm{J}_1(X)/X = 1-(1/2)(X/2)^2+(1/12)(X/2)^4 \ \ldots$$
$$\cos(X/2) = 1-(1/2)(X/2)^2+(1/24)(X/2)^4 \ \ldots$$

となり，第2項まで同じである。

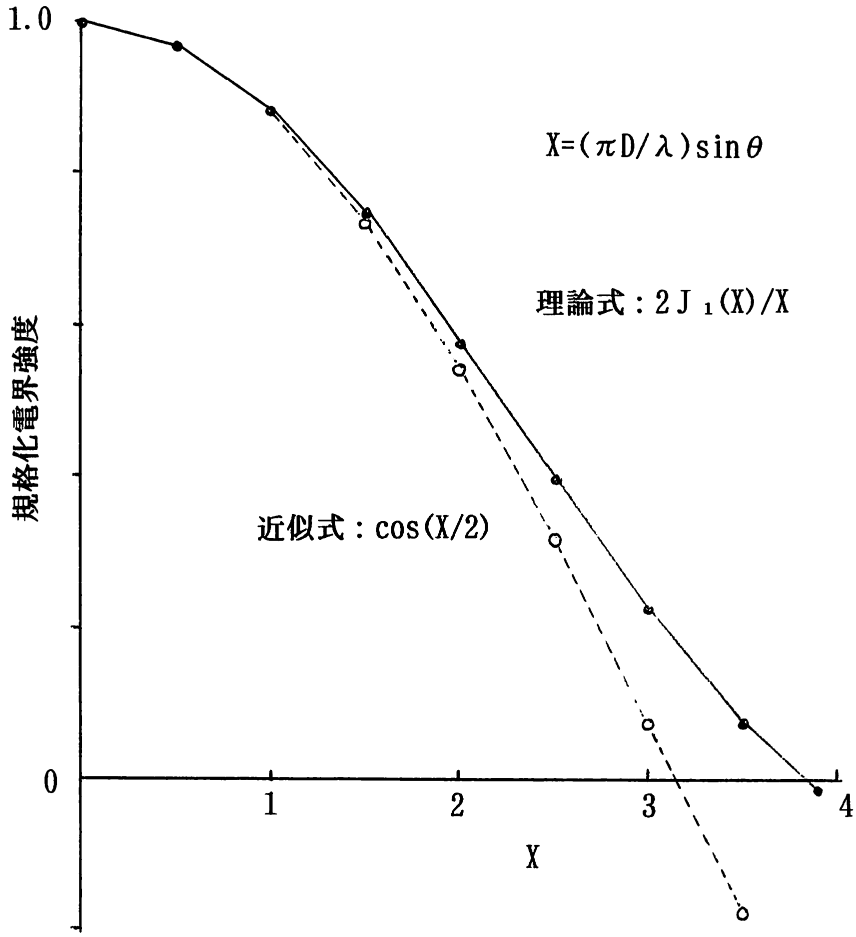


図3　開口面アンテナ指向投（メインローブ）

5．む す び

文献［1］では，このモデルを用いてアンテナが大きくなると指向性が鋭くなることが示されている。本論文では，さらに発展させて，指向性と利得の式を求め，これを理論式と比較して，初等的な計算でよい近似値（というより，式の形式はまったく同じで，定数比例係数の値が異なるだけであるのは特筆に値する）が得られることを示した。しかし，理論値の簡単な近似解法を提起したという意味は小さく，これによってこの簡単なモデルの正当性と有効性が示されたことの意味の方が大きい。

得られた近似値の精度については，実際のアンテナでは利得には70％程度（大きさによる）の効率係数を掛けること（パネルの面精度などの機械工作精度，パネル面の端部効果，フィードホーンや副反射鏡などによる遮蔽などによる）を考えれば，十分よい精度と考えられる。

なお，本論文は，1996年度入江研究室学部卒業研究として真鍋光裕（現在，岡山宮地弘商事株式会社）により行なわれた結果を入江がさらに発展，補完したものであることを付

記する。

参考文献

1) 後藤尚久："アンテナの科学"、講談社ブルーバックス B679, pp. 122 (1987).
2) Edited by Y. T. Lo/S. W. Lee, "Antenna Handbook (Volume II, Antenna Theory), Van Nostrand Reinhold, pp. 5—27, Now York (1993).
3) 同上, pp. 5—21.

A Simple Model for Calculating the Directivity and Gain of an Aperture Antenna

Koichi IRIE
Department of Information & Computer Engineering
Faculty of Engineering,
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan

(Received October 6, 1997)

The directivity and gain of an aperture antenna are calculated with a very simple model using elementary mathematics only, and the results obtained are quite satisfactory. The model used is such that a total power is radiated equally from two points each located at a half radius on the aperture diameter.

The following equations are obtained, the theoretical ones being shown in parenthesis for comparison purpose.

main beam full width	: $2\lambda/D$	$(2.44\lambda/D)$
main beam half-power width	: λ/D	$(1.029\lambda/D)$
antenna gain	: $8D^2/\lambda^2$	$(\pi^2 D^2/\lambda^2)$

It doesn't mean that the presented procedure offers a convenient alternative to complex theoretical calculation techniques so far, but rather it means this procedure has verified propriety and usefulness of this very simple model.