8の字型二重リング干渉計の干渉式の導出

高 橋 伸 夫

岡山理科大学工学部情報工学科

(1997年10月6日 受理)

はじめに

8の字型二重リング干渉計は、光の多重光路であるリング部分を持つ多光路干渉計であ る。リング部分を同じく2つ有する干渉計である双リング干渉計¹¹が2個の方向性結合器で 構成できるのに対して、8の字型二重リング干渉計は、リング部分が並列構成のため3個 の方向性結合器が必要である。

8の字型二重リング干渉計の出力強度については、散乱行列を用いてすでに報告されて いる²。しかしながら、この場合はコヒーレント光に限られ、実用的には十分とはいえ、雑 音状光等の現状の光全般には適用できない。一般性のある出力強度を求めるには、筆者ら が用いている周回光路法(光が伝搬する全ての光路を考え、その光振幅を求めて出力強度 を導出する手法)による必要がある³。

前回の報告⁴)で,光が伝搬する全ての光路の数について考察したので,今回はその光路を 伝搬する個々の光の振幅について考え,全出力振幅を求め最終的に出力強度を導出するも のである。

2章では、まず、8の字型干渉計の概要を述べ、そのあと、光振幅の導出の際に記述を 簡潔にするため、光が干渉計各部分を伝搬したときの複素振幅を表す記号について説明し ている。3章では、2つある出力の1つについて振幅の求め方を少し詳しく述べ、両方の 出力振幅を導出している。4章では、3章で求めた出力振幅から出力干渉式を導き、5章 で干渉特性例を示し考察を行っている。

2.8の字型二重リング干渉計

2.1 8の字型二重リング干渉計

図1に、8の字型二重リング干渉計の基本構成を示す。8の字型二重リング干渉計は光の多重光路であるリング部分を2個もつ多光路干渉計で、図に示すように3個の光ファイ バ方向性結合器(Directional Coupler:D.Cと略記)を用いて構成され、2つの出力を有 している。同図において、上のリングをAリング、下のリングをBリングとし、OUT1、OUT2 に出力した光の振幅を E1、E2 とする。光路長をそれぞれ $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22}$ とし、Aリングの長 さを L_1 、Bリングの長さを L_2 としており、 $L_1 = l_{11} + l_{12}, L_2 = l_{21} + l_{22}$ である。また、光ファ イバの減衰定数を α , 伝搬定数を β とし, 方向性結合 D.C1, D.C2, D.C3 の各々の損失を γ_1 , γ_2 , γ_3 , 結合係数を k_1 , k_2 , k_3 としている。

半導体レーザ(LD)から出射した光が干渉計に入射して出力端へ出射するまでには様々 な光路が考えられる。これらのすべての光路を考え,それぞれの光路からの光の振幅を求 め,すべて加えることにより出力光振幅 E1, E2 が導入される。

2.2 往復クロス

出力振幅 E1, E2 を導出するには、個々の光路を伝搬して出射した光の振幅をすべて求め る必要がある。これらの光振幅は、D.C2 に着目することにより規則正しく求めることが出 来る。すなわち、D.C2 を「往復クロス」する回数で光路を分けることにより可能となる。

往復クロスとは、図2に示すように、Aリングから D.C2 をクロスしてBリングへ入り、 Bリングを周回(周回数は任意)して D.C2 を再びクロスしてAリングへ戻るときの、この D.C2 を「往復する」ことを表している。この D.C2 の往復クロス回数で光路を分類する。 ここで、D.C2 を t 回往復クロスしてAリングを m 周Bリングを n 周し OUT1 に出射した 光の振幅を E1^(M) と表す。同様に OUT2 に対する光振幅を E2^(M) と表す。

2.3 リング各部の伝搬光振幅

各光路に対する出力振幅 $Ei_{min}^{(i)}$ (i = 1,2)の導出の際に、干渉計の各部分を伝搬したときの光振幅を個々に表しておくと、 $Ei_{min}^{(i)}$ の表記を簡単にすることが出来る。図3に干渉計各部分の伝搬経路とその部分を伝搬したときの光の振幅を示している。

例えば、aは、図に示すように、LD 側のポートから D.C1 へ入り A リングを l_{11} だけ通 過して D.C2 のポートまでの経路を表していると同時に振幅 1 の光が入射して a の経路を伝 搬して減衰したときの光振幅が $a = \sqrt{(1-\gamma_1)k_1}e^{-j\frac{\pi}{2}}$ となることを表している。

 $a, c, d, p_1, p_2, q_1, q_2, f, f'$ をまとめて表1に表示す。

なお, a, b, c, d, p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , f, f' の伝搬遅延については今回は議論を簡潔にするために 無視している。





図3 干渉計各部の経路表示

3. 出力振幅の導出⁵⁾

前回の報告⁴⁾で、D.C2をt回往復クロスしAmリングをm周、Bリングをn周して出力端に出射した光の振幅 $Ei_{i,k}^{(i)}$ を与える光路の数を求めた。異なった光路パターンでも同じ $Ei_{mn}^{(i)}$ を与えるため、その光路の数を計算したわけである。得られた光路数を表2に掲げる。表2の $Ai^{(i)}(m,n)$ は振幅 $Ei_{mn}^{(i)}$ の光が伝搬した光路の数を表している。D.C2をt回往復クロスした光の振幅をすべて集めた和を $Ei^{(i)}$ とすると、 $Ei^{(i)}$ は、

表1 各経路の伝搬振幅

$a = \sqrt{(1-\gamma_1)k_1} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j(\beta-j\alpha)l_{11}}$
$b = \sqrt{(1-\gamma_2)k_2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j(\beta-j\alpha)l_{22}}$
$c = \sqrt{(1-\gamma_3)k_3} e^{-j\frac{\pi}{2}}$
$d=\sqrt{(1-\gamma_1)k_1}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
$p_1 = \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-k_1)(1-k_2)} e^{-j(\beta-j\alpha)L_1}$
$p_2 = \sqrt{(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)(1-k_2)(1-k_3)} e^{-j(\beta-j\alpha)L_2}$
$q_1 = \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-k_1)k_2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j(\beta-j\alpha)L_1}$
$q_2 = \sqrt{(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)k_2(1-k_3)}e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j(\beta-j\alpha)L_2}$
$f = \sqrt{(1-\gamma_2)(1-k_2)} e^{-j(\beta-j\alpha)l_{12}}$
$f' = \sqrt{(1-\gamma_2)k_2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j(\beta-j\alpha)l_{12}}$

表2 光路数 A1 ⁽¹ (m.n).A2 ⁽¹ (n

$A1^{(\prime)}(m,n)$	$\frac{m!}{t!(m-t)!} \cdot \frac{(n-1)!}{(t-1)!(n-t)!}$
$A2^{(t)}(m,n)$	$\frac{m!}{t!(m-t)!} \frac{n!}{t!(n-t)!}$

$$Ei^{(t)} = \sum_{m=t}^{\infty} \sum_{n=t}^{\infty} Ai^{(t)}(m,n) Ei^{(t)}_{mn} \qquad i = 1,2$$
(3.1)

となる。従って,全出力振幅 *Ei*は,この *Ei*^(t) を往復クロス回数 t について総和をとれば得られる。すなわち,

$$Ei = \sum_{t=0}^{\infty} Ei^{(t)} \tag{3.2}$$

である

- 3.1 光振幅 *E*1の導出
- (1) 0回往復クロス光振幅 E1⁽²⁾

E1⁽²⁾ は D.C2 を往復しないため、光は B リングを通過しない。従って、n = 0 である。 また、E1⁽²⁾ はA リングも通過せず D.C1 のみを通過して出射するため、

$$E1_{00} = \sqrt{(1 - \gamma_1)(1 - k_1)} \tag{3.3}$$

となる。

Aリングに入射する光は、図3の経路 a, f を経て、Aリングの周回数に応じて p_1 を周回した後、d を経て出射する。よって、E1⁽²⁾は、

$$E1^{(0)}_{m0} = afd(p_1)^{m-1} \tag{3.4}$$

と得られる。

*E*1⁽¹⁾の光路数は表2より, *A*1⁽⁰⁾(*m*,0) = 1ゆえ, 各々1通りである。よって式(3. 1)を用いて,

$$E1^{(0)} = \sqrt{1 - \gamma_1} \sqrt{1 - k_1} + \frac{afd}{1 - p_1}$$
(3.5)

と求められる。

(2) 1回往復クロス光振幅 E1⁽¹⁾

まず、Bリングを1周(n = 1)して、Aリングをm周する光の経路を考える。図3 を参照して、 $a \rightarrow q_2 \rightarrow f' \rightarrow p_1^{(m-1)} \rightarrow d$ の経路をとるから、 $E1^{(1)}_{m} = aq_2 f' p_1^{(m-1)} d$ となる。B リングの周回数が増えるに従って、 p_2 が加わるわけであるから、結局、 $E1^{(1)}_{m}$ は次式で表される。

$$E1_{mn}^{(1)} = af' dq_2(p_1)^{m-1}(p_2)^{n-1} \qquad m, n = 1, 2\cdots$$
(3.6)

(3) 2回往復クロス光振幅 E1(2)

最短光路をとる光振幅 E1⁽²⁾ は、図3を参照して、E1⁽²⁾ = $aq_2q_1q_2f'd$ となる。これに、 Aリングの周回数が加われば、 p_1 を掛ればよい。よって、

$$E1_{22}^{(2)} = af' dq_1 (q_2)^2 (p_1)^{m-2}$$
(3.7)

となる。更に, Bリングを1周する毎に b2を考慮すればよいから, 結局, E1 22 は

$$E1_{mn}^{(2)} = af' dq_1(q_2)^2(p_1)^{m-2}(p_2)^{n-2} \qquad m, n = 2, 3\cdots$$
(3.8)

となる。

(4) 3回往復クロス光振幅 E13

E1いいは、

$$E1_{33}^{(3)} = aq_2q_1q_2q_1q_2f'd = af'dq_2(q_1q_2)^2$$
(3.9)

となり、これより、E1($m,n \ge 3$ である。

$$E1_{mn}^{(3)} = af' dq_2 (q_1 q_2)^2 (p_1)^{m-3} (p_2)^{n-3}$$
(3.10)

(5) t回往復クロス光振幅 E1(#)

今まで得られた結果,式(3.6),(3.8),(3.10)を以下に掲げる。

$$E1_{mn}^{(1)} = af' dq_2 (p_1)^{m-1} (p_2)^{n-1}$$

$$E1_{mn}^{(2)} = af' dq_2 (q_1q_2) (p_1)^{m-2} (p_2)^{n-2}$$

$$E1_{mn}^{(3)} = af' dq_2 (q_1q_2)^2 (p_1)^{m-3} (p_2)^{n-3}$$

これより, E1(#)は,

$$E1_{mn}^{(t)} = af' dq_2 (q_1 q_2)^{t-1} (p_1)^{m-t} (p_2)^{n-t}$$
(3.11)

と類推される。すなわち,図3を見ると往復クロス回数が増えるごとに,q2→q1の経路 が加わるわけで,これが式(3.11)にtのべき乗となって現れている。

(6) *E*1^(t) と *E*1 の導出

出力1に対する光振幅 E1 (2) が求まったので、式 (3.1)、(3.11)、表2より E1⁽¹⁾が以下の様に得られる。

$$E1^{(t)} = \frac{(af'dq_2)(q_1q_2)^{t-1}}{(1-p_1)^{t+1}(1-p_2)^t}$$
(3.12)

出力1に対する出力振幅 E1 は式 (3.5) と式 (3.2) のt に関する無限和との和である から、簡単に次の様に求められる。

$$E1 = \sqrt{1 - \gamma_1} \sqrt{1 - k_1} + \frac{afd}{1 - p_1} + \frac{af' dq_2}{(1 - p_1)\{1 - (p_1 + p_2) + (p_1 p_2 - q_1 q_2)\}}$$
(3.13)

式(3.9)が光振幅 E1 を与える式である。

3.2 光振幅 E2 の導出

(1) 0回往復クロス光振幅 E2⁽⁰⁾

出力 2 への 0 回往復クロス光は, B リングに入射するとA リングへ戻れない。従って, *E*2⁽/_m)の光は, A リングを *m* 周回したあと D.C2 を横切り B リングへ入り, *n* 周して出力 端 2 へ入射するわけであるから,

$$E2^{(0)}_{mn} = abcp_1^m p_2^n \qquad m, n = 0, 1, 2...$$
(3.14)

となる。

(2) 1回往復クロス光振幅 E2⁽¹⁾

1回往復クロス光は、必ず、A、B両リングを8の字型に1周する光路 q1q2 をとる。 D.C2の右側のAリング側ポートをAリングの周回始点に考えると分かりやすい。Bリング については、同じくBリング側ポートを起点すればよい。この様にして、E20kk を考えると、

$$E2_{mn}^{(1)} = abcp_1^{m-1}p_2^{n-1}q_1q_2 \qquad m, n = 1, 2, 3\cdots$$
(3.15)

となる。

(3) t 回往復クロス光振幅 E222

D.C2 を往復クロスすると、往復回路の増加に対して q_1q_2 の光路が増えてくる。すなわち、t回往復クロスに対して $(q_1q_2)^t$ の形で振幅に関与する。この (q_1q_2) は同時に両リングの周回をも意味するから、 p_1p_2 の項は $(p_1)^{n-t} \cdot (p_2)^{n-t}$ となる。よって、 $E2^{(2)}_{2n}$ は、

$$E2_{mn}^{(2)} = abcp_1^{m-2}p_2^{n-2}q_1^2q_2^2 \qquad m, n = 2, 3, 4, \cdots$$
(3.16)

となる。

(4) E2^(t)とE2の導出

出力2に対する周回光振幅 E2⁽²⁾より、一般項 E2⁽¹⁾は次式となる。

$$E2_{mn}^{(t)} = abcp_1^{m-t}p_2^{n-t}q_1^tq_2^t$$
(3.17)

式 (3.1),式 (3.17) と表2より, E2^(*)が次式の様に得られる。

$$E2^{(t)} = abc \frac{q_1^t q_2^t}{(1-p_1)^{(t+1)}(1-p_2)^{(t+1)}}$$
(3.18)

よって、出力2の光振幅 E2は、式 (3.2)、(3.8) より

$$E2 = \frac{abc}{1 - (p_1 + p_2) + (p_1 p_2 - q_1 q_2)}$$
(3.19)

となる。

4. 出力強度

前章で2つの出力振幅 E1, E2 が得られたので,次に出力強度 P1, P2 を求める。この ため、E1, E2 の式 (3.13), (3.19) を次のように書き改める。

$$E1 = \frac{\sqrt{1 - \gamma_1}}{\sqrt{1 - k_1}} \left\{ 1 - \frac{T}{H} \right\}$$
(4.1)

$$E2 = \frac{j\sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)k_1k_2k_3e^{-j\phi(l_{11}+l_{22})}}}{H}$$
(4.2)

 $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ で、 H, T, ϕ は、

$$H = 1 - \sqrt{(1 - \gamma_2)(1 - k_2)} \left(\sqrt{(1 - \gamma_1)(1 - k_1)} e^{-j\phi L_1} + \sqrt{(1 - \gamma_3)(1 - k_3)} e^{-j\phi L_2} \right) + (1 - \gamma_2) \sqrt{(1 - \gamma_1)(1 - k_1)(1 - \gamma_3)(1 - k_3)} e^{-j\phi(L_1 + L_2)}$$
(4.3)

$$T = k_1 (1 - \sqrt{(1 - \gamma_2)(1 - \gamma_3)(1 - k_2)(1 - k_3)} e^{-j\phi L_2})$$
(4.4)

 $\phi = \beta - j\alpha \tag{4.5}$

ただし、 β :光ファイバの伝搬定数 α :光ファイバの損失

である。

光の強度 Pi は次式で求められる。

$$P_i = \langle E_i \cdot E_i^* \rangle \qquad i = 1,2$$
 (4.6)

ここで、<・>は統計的平均、*は複素共役を表す。

式(4.1),(4.2)を式(4.6)に代入すれば、出力強度 P1, P2 が得られる。これらの計算

は,結局,HH*,HT*,H*T,TT*を求めることであり,これらをうまく纒めることに より、次の P_1 , P_2 が得られた。

$$P1 = (1 - \gamma_{1}) \cdot \frac{c_{0} - 2c_{1} \cos \beta L_{1} - 2c_{2} \cos \beta L_{2} + 2c_{12} \{\cos \beta (L_{1} + L_{2}) + (1 - k_{2})\cos \beta (L_{1} - L_{2})\}}{C_{0} - 2C_{1} \cos \beta L_{1} - 2C_{2} \cos \beta L_{2} + 2C_{12} \{\cos \beta (L_{1} + L_{2}) + (1 - k_{2})\cos \beta (L_{1} - L_{2})\}}$$

$$(4.7)$$

$$P2 = \frac{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)k_1k_2k_3}{C_0 - 2C_1\cos\beta L_1 - 2C_2\cos\beta L_2 + 2C_{12}\{\cos\beta(L_1+L_2) + (1-k_2)\cos\beta(L_1-L_2)\}}$$
(4.8)

$$c_{0} = (1-k_{1}) + (1-\gamma_{2})(1-\gamma_{3})(1-k_{1})(1-k_{2})(1-k_{3})e^{-2\alpha L_{2}} + (1-\gamma_{1})(1-\gamma_{2})(1-k_{2})e^{-2\alpha L_{1}} + (1-\gamma_{1})(1-\gamma_{2})^{2}(1-\gamma_{3})(1-k_{3})e^{-2\alpha (L_{1}+L_{2})}$$
(4.9)

$$c_1 = \sqrt{(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)(1-k_1)(1-k_2)} e^{-\alpha L_1} \{1+(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)(1-k_3)e^{-2\alpha L_2}\}$$
(4.10)

$$c_2 = \sqrt{(1-\gamma_2)(1-\gamma_3)(1-k_2)(1-k_3)} e^{-aL_2} \{ (1-k_1) + (1-\gamma_1)(1-\gamma_2)e^{-2aL_1} \}$$
(4.11)

$$c_{12} = (1 - \gamma_2) \sqrt{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)(1 - k_1)(1 - k_3)} e^{-a(L_1 + L_2)}$$
(4.12)

$$C_{0} = 1 + (1 - \gamma_{2}) \{ (1 - \gamma_{1})(1 - k_{1})(1 - k_{2})e^{-2\alpha L_{1}} + (1 - \gamma_{3})(1 - k_{2})(1 - k_{3})e^{-2\alpha L_{2}} + (1 - \gamma_{1})(1 - \gamma_{2})(1 - \gamma_{3})(1 - k_{1})(1 - k_{3})e^{-2\alpha (L_{1} + L_{2})} \}$$

$$(4.13)$$

$$C_1 = c_1 \tag{4.14}$$

$$C_{2} = \sqrt{(1-\gamma_{2})(1-\gamma_{3})(1-k_{2})(1-k_{3})} e^{-aL_{2}} \{1+(1-\gamma_{1})(1-\gamma_{2})(1-k_{1})e^{-2aL_{1}}\}$$
(4.15)

$$C_{12} = c_{12}$$
(4.16)

$$C_{12} = c_{12}$$

である。

式(4.7),(4.8)が出力1,2での光強度 P₁, P₂を表す式である。

5.干渉特性と考察

グラフ1に出力強度 P_1 の干渉特性の1例を示した。パラメータ値は $k_1 = k_3 = 0.1, k_2 =$ 0.0018, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.03$, $L_1 = 1.0m$, $L_2 = 2.0m$ である。 グラフ 2 は出力強度 P_2 の干 渉特性例である。この場合はすべての D.C の損失を零にしている。パラメータ値は k₁ = k₃ $= 0.1 \ \ c \ k_2 = 0.00277 \ \ c \ b \ a \ b$

グラフ1,2ともリングAの光路長L1を僅かに変化させて干渉特性を得ている。すなわ ち、 $L_1 \in L_1 = L_1 + \Delta l$ とし、 $\Delta l \in 7.7 \text{A/msec}$ で変えている。なお、光ファイバの屈折率 をn = 1.5, 波長を $\lambda = 1.0 \mu m$ とした。



グラフ1の Pi は完全共振状態のグラフである。これは、Pi = 0 として、共振条件

$$\beta L_1 = 2\pi N, \qquad \beta L_2 = 2\pi M \qquad N, M = 1, 2, 3...$$
 (5.1)

を加味して k_1 , k_3 , γ_1 の関係

$$k_{2} = 1 - \{(1 - \gamma_{1}) + \frac{1}{1 - \gamma_{1}}\}^{2} \frac{1 - k_{1}}{(2 - k_{1})^{2}}$$
(5.2)

を求め、上式を満たす3つのパラメータ値について特性を求めたものである。

(5-1)式の条件は、2個のリングを単独のリング共振器と見なしたときの共振条件であ るが、(5-2)式を満足するパラメータ(k₁, k₃, γ₁)の値以外でも完全共振特性を示す場合が ある。従って、矢張り2個のリングを同時に考慮した8の字光路の共振条件を加味して検 討する必要もあると思われる。

グラフ2では P₂出力が1となる最大出力条件下の特性を示したが、(5-1)式の条件を用いた。この場合も、2個のリングを同時に考慮した8の字光路の共振条件を検討する必要 があると思われる。

6. む す び

周回法を用いて8の字二重リング干渉計の干渉特性式を求めた。この際,入射光に完全 なコヒーレント光を想定し,また,リングも過渡応答が生じない長さのものと仮定して導 出した。この周回法は,コヒーレント光でない入射光に対しても適用可能で,少々複雑な 式となるが数値計算式を求めることができる。その場合には,(3-1)式中の周回光振幅 *Ei* (*i*) は伝搬による時間遅れを持つ入射光包路線を含む式となるため,*Ei*⁽ⁱ⁾は有理式にならない。 従って,出力強度式も光源のコヒーレント関数を含む Σのままの式となる。今後,このコ ヒーレント光でない入射光に対する出力強度について検討する予定である。

References

- 1) N. Sugimura, N. Takahashi, K. Yamauchi, and M. Maeda: Coherent Multiplexing of Ring Interferometric Fiber Optic Sensors, Trans. of IEICE, Vol. E. 72, No. 10, October (1989).
- K. Oda, N. Takato and H. Toba: A Wide-FSR Waveguide Double-Ring Resonator for Optical FDM Transmission Systems, Journal of Lightwave Technolgy, Vol. 9, No. 6, pp.728-736, June (1991).
- 3) N. Takahashi: Interferometric Analysis of All-single-mode-fiber Ring Interferometers, Bulletin of Okayama University of Science, No. 29, A, pp.306-318, March (1994).
- 4) N. Takahashi: Calculation of the Number of Optical Paths of 8-Shaped Double Ring Interferometers, Bulletin of Okayama University of Science, No. 32, A, pp.103-112, March (1997).
- 5) 中野 誠, 難波 崇, 帆足 学:8の字型二重リング干渉計の干渉特性:1996年度岡山理科大学情報工 学科卒業研究報告.

Derivation of the Output Intensities of 8-Shaped Fiber Double Ring Interferometers

Nobuo Takahashi

Department of Information and Computer Faculty of Engineering Okayama University of Science Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan (Received October 6, 1997)

A fiber 8-shaped double ring interferometer uses three directional couplers and has two output ports. The ring interferometer is highly sensitive and its finesse can be varied with the value of the coupling coefficients of the directional couplers used.

In this paper, the intensities at the two output ports of the interferometer were derived by calculating every field amplitude emerging at the ports which travels one of the paths in the ring interferometer. The derivation was based on the number of the paths which was calculated by grouping those into classes according to the number of the return trips to the coupler which linked the two ring parts.