

初等幾何に由来する安定型確率過程の決定性*

竹 中 茂 夫

岡山理科大学理学部応用数学科

(1997年10月6日 受理)

1 始めに

中学、高校で集合論を学んだ頃を思い出していただきたい。集合の共通部分、結合等は通常3つの集合(たいていは円で表現されている)を使って図解されている(図1)。しかし、4つの集合を使ったものはなかったはずである。理由は4つもの集合が関連するような複雑な関係について、この段階で考える必要がないからであろうか。実のところは、いろいろと図を書いて見ればわかるように、4つの円ではどうしてもすべての場合を尽くせないのである(図2)。このことは比較的知られてはいるが、証明についてはどうだろうか。もっと一般に、 k 個の論理命題を(超)球で表現するとしたら、論理命題の総ての組合せを表すために必要な空間の次元 d を考えてみよう。4つの場合からの類推、 $d \geq k-1$ は正しい。この文で初等幾何学な証明を与える。

安定型確率過程の決定性と関連し、円錐の対称差を(球の代わりの)集合とした場合に似通った事実が成立することが、佐藤由身子氏²によって証明されているが、ここに示す証明は短くかつ直感的であるという利点がある。また、佐藤氏と共同研究を行っていたころにこの事実について調べた限りでは、証明の所在が分からなかった。決定性をもつ安定型確率過程の存在という新しい事実を証明付きで紹介する事も必要であろう。

証明を思い付いたきっかけは、4年生セミナーで D. Knuth の Concrete Mathematics (邦題 計算機の数学)を選んだことにある。この本の設問中に、平面が n 本の直線でいくつの領域に分割されるかという分割数の問題及びその拡張がある。学生の一人、角道英一君がこれを卒業研究として選んだ。彼のために、高次元化、図形の一般化という方向の拡張があると説明し、例として上の場合を話した。手始めに3次元空間で球の場合を考えていたとき、(超平面の場合も同時に考えていたこともあり) n 個の球と1個の超平面であれば、その超平面での切り口を見ることにより、次元が1つ下がる事に気がついた。そこから、ここに記する証明には一気呵成である。

*献呈：平井 武京都大学教授の還暦を祝し

次のような記号の導入が便利である。

n 個の集合, $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ を考える。 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) \in 2^n = \{0, 1\}^n$ に対して, $\mathbf{S}^{\mathbf{e}} \equiv \bigcap S_i^{e_i}$ と置く, 但し $S_i^{e_i}$ は $e_i = 0$ であれば S_i , $e_i = 1$ なら S_i^c と約束する。たとえば, $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$ であれば, $\mathbf{S}^{\mathbf{e}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3^c$ である (図1.)。

これを使うと,

$$E[\exp i(\sum_{k=1}^{k=n} z_k Y(S_k))] = \exp -[\sum_{\mathbf{e} \in 2^n - 1} \mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}}) |\sum_{i: e_i=0} z_i|^{\mathbf{e}}].$$

従って上の特性関数の式より, set-indexed SaS process の n 次元分布を知る事と, $2^n - 1$ 個の量, $\mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}}), \mathbf{e} \in 2^n - 1$, ただし, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, を知る事とは同等となる。ここで, 3つの円では図1のように話は簡単であったが, 4つの円では, 上の形の領域が総ては現れてはいないことに注意が必要である。たとえば図2の例では, $(0, 0, 1, 1)$ 及び $(0, 0, 0, 1)$ に対応する場合は出現していない。これは次元に対して一般化される。

以下, S_i が d 次元空間中の球(中身の詰まったボール)の場合に, $n \geq d+2$ なら, $\mathbf{S}^{\mathbf{e}_0} = \emptyset$ となる $\mathbf{e}_0 \in 2^n$ が存在すること。さらに, この性質により, 考えている安定過程の $d+2$ 次元分布が $d+1$ 次の周辺分布から決定づけられる事を示す。

4 証 明

証明は次の3つの部分にわかれる。

1. 一辺の長さが $\sqrt{2}$ の d -simplex の $d+1$ 個の頂点に単位球をおくと, それによる空間の分割数が最大の 2^{d+1} となること。
2. d 次元空間に, $d+2$ 個の任意半径の球をおいたとき, 空間の分割数の最大が $7 \times 2^{d-1}$

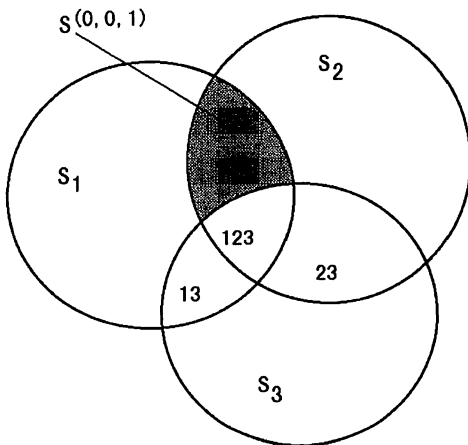


図1

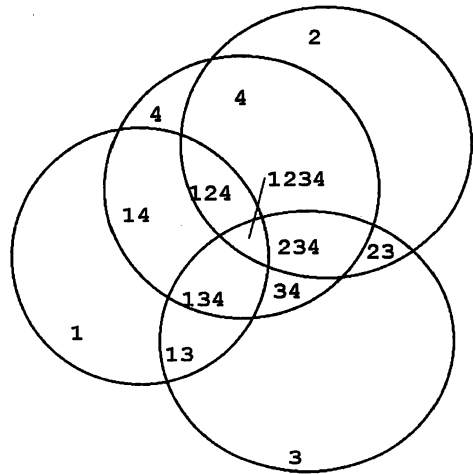


図2 (0011), (0001) が欠ける例

となり、 2^{d+1} より小さい。すなわち、 2^{d+2} 個の論理的領域のうち必ず1つは零集合となること。これは、次元と個数を同時にパラメータとした帰納法で証明される。

3. 測度 μ による部分領域の体積の決まり方。

4.1 重心

d 次元空間の一辺の長さが $\sqrt{2}$ の d -simplex を考える。この simplex の重心 G_d から頂点までの長さを g_d 、頂点から対応する面へおろした垂線の長さを l_d とする (図3)。

この時、 $\frac{l_d}{g_d} = \frac{d+1}{d}$ が成立する。また、この垂線の足がこの面 ($(d-1)$ -simplex) の重心 G_{d-1} である事を考慮すると、ピタゴラスの定理により関係 $g_{d-1}^2 + l_d^2 = 2$ が得られる。これと初期値 $g_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ を合わせて、

$$g_d = \sqrt{\frac{d}{(d+1)}} \nearrow 1, \quad l_d = \sqrt{\frac{d+1}{d}} \searrow 1.$$

さて、頂点が中心になるように単位 d 球 S_{d+1} を置いてみよう。この球の内部に G_d が含まれ、 G_{d-1} は含まれないことは明らかである。 G_{d-1} を含む1次元低い simplex の各頂点を中心とする単位球 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_d$ を考えてみる。これらの d 個の球が任意の $\mathfrak{E} \in \{0, 1\}^d$ に対して、 $S^{\mathfrak{E}} \neq \emptyset$ を充たすと仮定する。これは $\{0, 1\}^{d+1}$ では、 $(*, *, *, \dots, *, 1)$ の形の元に対して対応する集合が空でない事を意味する。総ての頂点で同様の事が成立しているので、 $(0, 0, 0, \dots, 0)$ に対応する集合すなわち考えている $d+1$ 個の総ての球の共通部分以外は空で

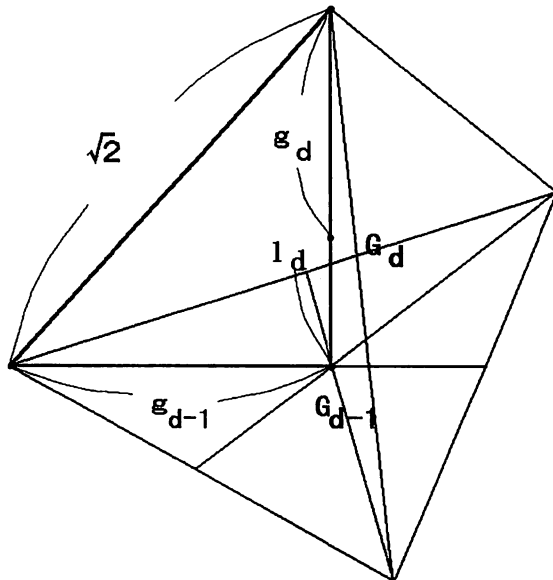


図3

ないことがわかる。ところで総ての球 S_i は重心 G_d を内点として含むので $S^0, \mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$ も空ではない。 $d = 2$ に対して、命題は成立しているから、帰納法により命題が示された。

4.2 $d+2$ 個の球

R^2 に 4 個の円を考える。上の考察により、始めの 3 個で空間はせいぜい 8 つの領域に分割されるのみである。ここに、新たな 4 番目の円が加わったと考える。円どうしは高々 2 点の交点を持つのみであるから、4 番目の円上には他の円との交点は高々 6 個である。この交点により円は高々 6 個の円弧に分割される。ところがこの円弧の一つ一つが前の 8 つの領域のどれかを分割しているから、4 円による分割数は高々 14 となる。

この証明は次のように考える事ができる。射影反転で 4 番目の円を直線に射影する。他の 3 円はまた円に射影される。4 番目の円が写された直線 R^1 上に制限して考えると、この R^1 , 3 円との交点によって 7 つの線分に分割されている (8 つではない), 図を 2 次元で考えると、無限遠を含む領域を例外として、この線分の各々によって 3 つの円で分割された領域の再分割が起こっている。したがって、3 円と直線 (すなわち 4 円) による空間の分割数はせいぜい $8+6 = 14$ である。これは、まさに帰納法の形式をしている。

$\mathbf{x} \in R^d$ に対して、 $-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ を対応させる変換は Möbius 反転とよばれ、(超平面を半径 ∞ の球面と考えると、) R^d のすべての球面を又球面に移す変換である。この時 1 つの球面を任意に選んで、超平面に写す事が出来る。

これらのことは、球面の方程式 $|\mathbf{x}-\mathbf{a}|^2 = c^2$ がこの変換によって $|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \mathbf{a}|^2$ になり、これ

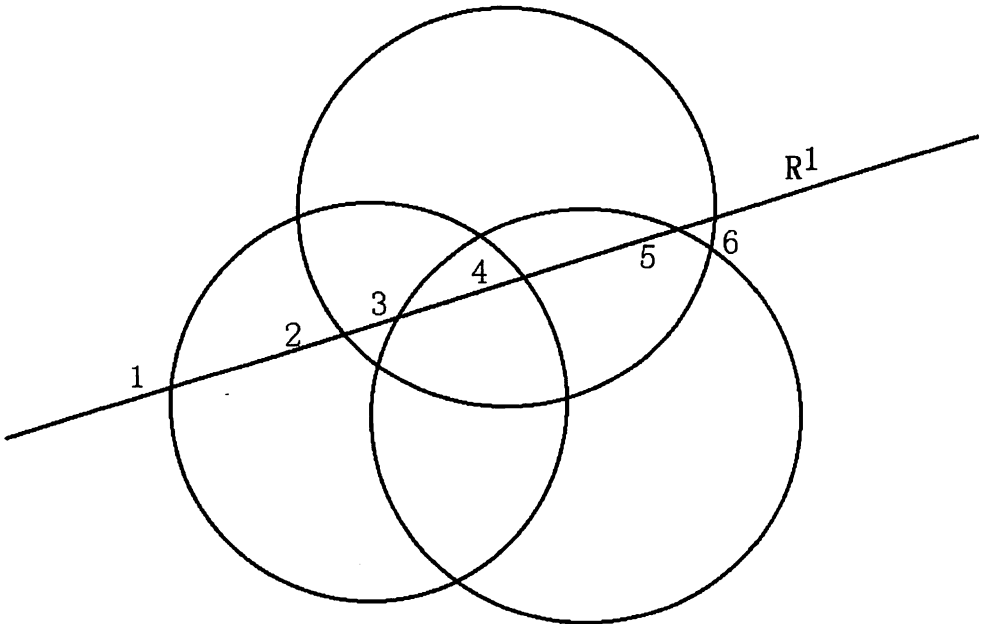


図 4

を変形して、 $|\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2 - c^2}|^2 = \frac{c^2}{(|\mathbf{a}|^2 - c^2)^2}$ が得られることから明らか。

R^d に $d+1$ 個の球が配置されているとする。ここに $d+2$ 個目の球を配置するのだが、Möbius 変換で、この新しい球は超平面であるとしてよい。この超平面上で前の $d+1$ 個の球面を見てみると、これは R^{d-1} での $d+1$ 個の球面の配置とみなせる。したがって帰納法の仮定により、 R^{d-1} は高々 $7 \times 2^{d-2}$ 個の領域に分割されるにすぎない。この各々の領域が R^d の $d+1$ 個の球で作られた領域を再分割するので、 $d+2$ 個の球で R^d は高々 $7 \times 2^{d-1}$ 個の領域に分割される。

4.3 体積の決まり方

次に、 R^d 上に測度 μ が与えられているとする。問題は、 $\mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}_0})$, $\mathbf{e} \in 2^{d+2}$ の決まり方である。 \mathbf{e}_0 に対して、 $\mathbf{S}^{\mathbf{e}_0} = \emptyset$ 従って $\mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}_0}) = 0$ であったとする。 \mathbf{e}_1 を \mathbf{e}_0 からのハミング距離が 1 の任意元とする、すなわち $\#\{i; \mathbf{e}_{0i} \neq \mathbf{e}_{1i}\} = 1$ 。この時、 $\mathbf{S}^{\mathbf{e}_1} = \mathbf{S}^{\mathbf{e}_0} \cup \mathbf{S}^{\mathbf{e}_1} = \mathbf{S}^{\mathbf{e}}$, $\exists \tilde{\mathbf{e}} \in 2^{d+1}$ 。従って、 $\mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}_1}) = \mu(\mathbf{S}^{\mathbf{e}})$ が成立する。このようにして、 \mathbf{e}_0 の測度がわかれば、それとハミング距離が 1 である集合の測度は、 2^{d+1} の元、すなわち、1 次元低い周辺分布から与えられる量から計算出来る。また、 $2^{d+1} - 1$ は、ハミング距離 1 の辺で連結である。

以上を合わせて、 R^d の球をパラメータ集合とする Set-Indexed SaS-process の $d+2$ 次元分布は $d+1$ 次元分布を知る事によって決定する事が出来る。($d+1$ 次元の局所的決定性を持つ、またスペクトルの台を考えることによって、対称安定確率過程として $d+2$ 次元の決定性を持つことがわかる)

4.4

上の性質が単に凸だけでは駄目だという例として、合同な 4 つの凸図形で 2^4 個の総ての種類の領域がある例を示す (図 5)。

4.5

最初にこのような決定性が見つかったのは、自己相似安定過程を円錐の対称差を使って構成した筆者の論文⁵であるが、高次元の場合の決定性は佐藤由身子氏²が完全な証明を与えた。ここでとり扱ったのはより簡単な定常過程に対応するものであるが、元の場合より直感的でありより理解が易しい。安定過程にこのような決定性があるというのは、古くからの安定過程の研究者にも新鮮であり、この分野の最初の国際的な教科書¹にも 1 次元の場合のみであるが数節を割いて紹介されている。しかし残念ながら高次元の場合とか、1 次元ですらもっと複雑な決定性があること⁶はあまり知られていない。構成、証明ともに複雑である事も 1 つの理由と思われる (実際上記教科書でも事実の引用の誤りが見られる)。ここで与えた初等的かつ直感的に証明される例が、決定性に関する知識の普及に役立てばと願っている。

4.6 いくつかの例

4.6.1 定常安定過程

$E = R^d$, μ を d 次元の Lebesgue 測度, $T = R^d$, $S_t = \{\mathbf{x} \in R^d; |\mathbf{x} - \mathbf{t}| \leq 1\}$ とすれば、

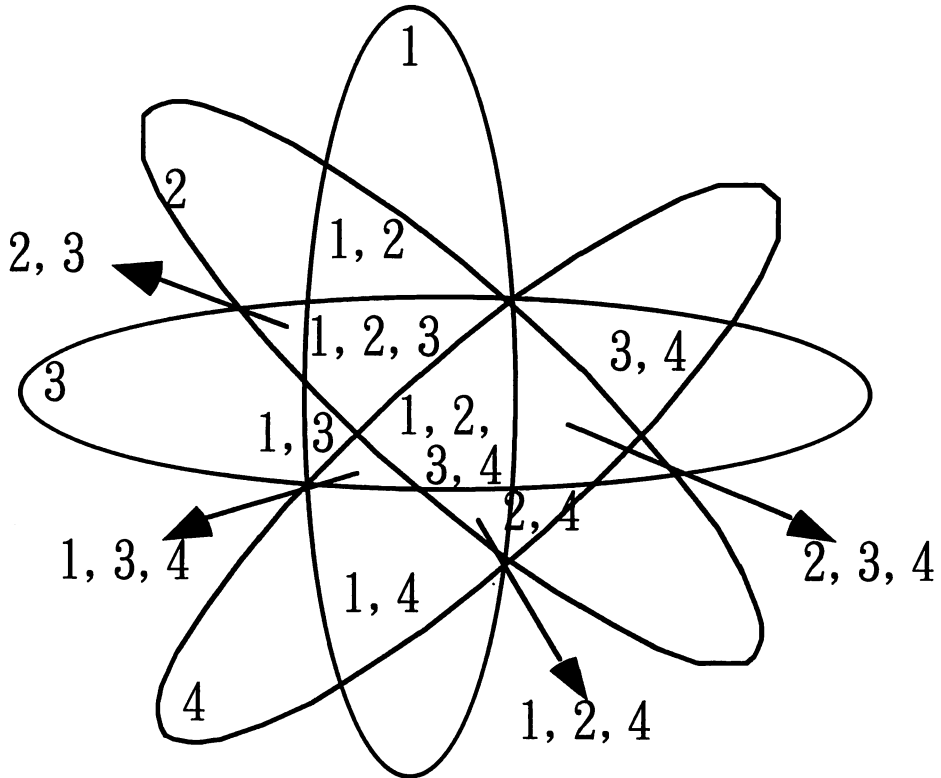


図5

$d+1$ 次の局所的決定性をもつ安定型の定常過程が得られる。

4.6.2 d パラメータ安定運動 (線形加法過程)

上の例で、 $S_t = \{x \in R^d; |x-t| \leq |t|\}$ とすると、パラメータをどの直線に制限しても独立増分の安定過程が得られるが、これも $d+1$ 次の局所決定性をもつ。実は、出てくる球が総て原点を共有することより、さらに強く d 次の局所決定性を持つこともわかる。

4.7 種々の決定性について。

何種類も決定性の概念が出てきているので、整理しないと混乱がおきる。

1. Set indexed process でありかつその定義集合 S_t の形が与えられているとする。このとき、任意の $n+1$ 個の時点をとり、これに対する $n+1$ 次元の結合分布が、それ自身の $n+1$ 個の n 次元周辺分布のみから決定される場合。いわば、測度による n 次元局所決定性。 (*n-dimensional local determinism of controll measure*)
2. 上の条件のない、即ち set indexed set であることもわかっていない場合で、1) のような決定性を持つ場合、局所決定性 (*n-dimensional local determinism*)
3. 総ての n 次元分布がわかれば、それから $n+1$ 次元分布が決定できる。確率過程としての決定性。 (*n-dimensional determinism as a process*)

決定性の強さは測度による n -次局所決定性 $>$ n -次局所決定性であり, 上の例と定義集合に円錐を用いるチェンソフ型は, 測度による $d+1$ 次局所決定性を持ち, $d+2$ 次の局所決定性をもつ。また, 線形加法過程⁷は測度による d 次局所決定性と $d+1$ 次局所決定性をもつ。更に森氏の構成と, ラドン変換を用いれば, 確率過程として2次の決定性を持つこともわかる。

set-indexed process の局所的決定性は初等幾何学的性質の反映であるが, 確率過程としての決定性はむしろ測度論的なものであることを注意しておく。また, これらとは異なり, スペクトルが純点でない安定過程の決定性については古城氏の研究⁸がある事を付け加えておく。

参考文献

- 1) Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes—Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, (1994)
- 2) Sato, Y. *Distributions of stable random fields of Chentsov type*. Nagoya Math. J. **123**, pp. 119-139 (1991)
- 3) Sato, Y. *Structure of Lévy measures of stable random fields of Chentsov type*. Probability and Mathematical Statistics **13**, pp. 165-176 (1992)
- 4) Sato, Y. and Takenaka, S. *On determinism of symmetric α -stable processes of generalized Chentsov type*. 'Gaussian Random Fields', pp. 332-345, World Scientific (1991)
- 5) Takenaka, S. *Integral-geometric constructions of self-similar stable processes*. Nagoya Math. J. **123**, pp. 1-12 (1991)
- 6) Takenaka, S. *Examples of self-similar stable processes*. 'Stochastic Processes', pp. 303-311, Springer-Verlag (1993)
- 7) Mori, T. *Representation of linearly additive random fields*. Prob. Theory and Related Fields **92**, pp. 91-115 (1992)
- 8) Kojo, K. *On the determinism of the distributions of multiple Markov non-Gaussian symmetric stable processes*. to appear in Nagoya Math. J.

Determinisms of Stable Processes Derived from Elementary Geometry

Shigeo TAKENAKA

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science

Okayama University of Science

Ridai-cho, 1-1, Okayama 700-0005, Japan

(Received October 6, 1997)

Some of stable set-indexed processes have a property called determinism. This property comes from the following fact in elementary geometry; in the d -dimensional Euclidean space, there exist configurations of $d+1$ spheres which divide the whole space into 2^{d+1} sub-regions but no configurations of $d+2$ spheres which divide the space into 2^{d+2} regions. In the later case, the maximum number of regions is $7 \times 2^{d-1}$. This fact tells us that the set indexed process which employs d -spheres as the defining sets has $d+1$ -dimensional determinism.