

振動系非線形方程式における 高次の擬 Symplectic 数値解法の評価と適用

石井 一夫・下山 大徳・白濱 直哉

岡山理科大学理学部応用物理学科

(1996年10月7日 受理)

1. 序 論

前回の論文¹⁾による数値計算の安定性の評価から, Symplectic 数値解法の性質や, 適用の仕方がわかったが, それ以上に多くの課題を残した。また擬 Symplectic 数値解法に関しても一般的なアルゴリズムを導くまでには至らなかった。したがって今回は擬 Symplectic 数値解法だけに絞り, もう少し理論的にアプローチするとともに定量的に分析し, より高速かつ正確なアルゴリズムの開発を考えてみる。物理系のモデルは振動系における非線形方程式を使い吟味していく。まず, Lie 変換が与える Symplectic 数値解法のアルゴリズム²⁾について説明をする。ここで, 正準方程式の形式解

$$z^m(t_n) = T \exp \left[\int_{t_0}^{t_n} dt \hat{X}_H(t) \right] z^m(t_0)$$

(ここで T は時間順序積) より, 指数関数の部分を離散化すると,

$$\exp(\tau \hat{X}_H)$$

と書ける。これは次のように, 級数で表すことができる。

$$\exp(\tau \hat{X}_H) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau \hat{X}_H)^n / n!$$

任意の関数 f に $\exp(\tau \hat{X}_H)$ を作用させる場合, 次のようになる。

$$\exp(\tau \hat{X}_H) f = f + \{\tau X_H, f\} + \{\tau X_H, \{\tau X_H, f\}\} / 2! + \cdots$$

次節で, この変換理論の類推から散逸系におけるカオス力学系に適用する。

2. Duffing's equation への適用による擬 Symplectic 解法の理論

Duffing's equation³⁾ は次のように与えられる。

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = b \cdot \cos t \quad (2-1)$$

$k = b = 0$ のとき (5) 式は, エネルギー保存則が成り立つため, ハミルトニアンは

$$H = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (y = \dot{x}) \quad (2-2)$$

と構成できる。そこで Lie 変換を使って, (2-2) を Lie operator とし, x, y つまり, 正準共役量にそれぞれ作用させ Symplectic 写像を導き, 行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \tau^2 x^2 & \tau \\ -\tau x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

となる。これは, 1 次の解法で, この位相空間において Symplecticity を保ちつつ写像を行っている。わかりやすくするため X_H を下のように, 二つに分けて変換を行う。

$$S = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (2-4)$$

$$D = -ky + b \cdot \cos t \quad (2-5)$$

ただし, D は, 散逸項であって, 加速度の次元を持つ。したがって時間刻みである τ を掛けると速度と同じ次元を持つ量となる。そのため速度である y に (2-6) のように加えると, おおよそその解の挙動を表現することができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \tau^2 x^2 & \tau \\ -\tau x^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - \tau(ky - b \cdot \cos t) \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

このようにして, 散逸系における 1 次の解法のアルゴリズムを Symplectic 数値解法を修正することにより導いた。この方法を前回の論文と同様, 擬 Symplectic 数値解法 (Pseudo-Symplectic numerical solution) と呼ぶ。次の節では, ここで導いた 1 次の解法の評価を行う。

3. 1 次の擬 Symplectic 数値解法の評価

まず, 同じ 1 次の解法である Euler 法との誤差の比較であるが, Euler 法による写像行列式は,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ -\tau x^2 & 1 - k + \frac{b \cdot \cos t}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3-1)$$

となり, その行列式は $1 - k + \frac{b \cdot \cos t}{y} + \tau^2 x^2$ という値になるので, 擬 Symplectic 数値解法と $\tau^2 x^2$ だけ違う。これは打ち切り誤差によるもので, みかけのエネルギー増加の原因となるため複雑な系では, 明らかに適用できない。ここでは, 6 次の Runge-Kutta 法⁴⁾の近

似度が最も良いものとして、1 次の擬 Symplectic 数値解法の比較評価を行う。解の挙動を大域的に考察できる Poincare 写像によって定性的に評価をしてみると、ジャパニーズアトラクタ⁵⁾といわれる Duffing's equation におけるカオティックな振る舞いが観察できる。1 次の擬 Symplectic 数値解法の刻み依存性と近似の良さを調べるため 6 次の Runge-Kutta 法と、どのくらい一致しているか Poincare 写像によって評価を行った。その結果、刻みを小さくしていけば、定性的には Runge-Kutta 法とほぼ一致することがわかった。丸め誤差などのため、完全な一致は望めないが、解の大域的構造を調べるにはこの簡単な擬 Symplectic 一次の解法アルゴリズムで十分と言える。次に、高次の解法を導くための議論を行う。

4. 高次の擬 Symplectic 数値解法

Symplectic 数値解法から類推した高次の擬 Symplectic 数値解法のアルゴリズムを次に考える。高次の Symplectic 数値解法は、BCH の公式⁶⁾で表される保存量を、指数関数を増やすことによって近似を行っている。(2-6) 式で示した 1 次の解法の行列表式は、次のアルゴリズムによって書き換えられる。

$$\begin{aligned}\bar{y} &= y + \tau D \\ y' &= \bar{y} - \tau \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{x=x} \\ x' &= x + \tau \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=y'}\end{aligned}\tag{4-1}$$

また、2 次の Symplectic 解法 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ は、

$$\begin{aligned}x^* &= x + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=y} \\ y' &= y - \tau \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{x=x^*} \\ x' &= x^* + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=y'}\end{aligned}$$

による写像で与えられることが既にわかっている⁶⁾。ここから 2 次の擬 Symplectic 解法を導くには、(2-6) の形式からの類推より、散逸項の含んだ写像式の順序を考慮に入れてみる。このことは行列の積が一般的に非可換となるため、つまり (2-6) において Symplectic な行列の前に (x, y) は散逸行列と積をとるため (4-1) では (x, y) が (x', y') になる直前に散逸項の写像を行っている。したがって、2 次の擬 Symplectic 解法は、

$$\begin{aligned}
 x^* &= x + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=y} \\
 \tilde{y} &= y + \tau D \\
 y' &= \tilde{y} - \tau \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{x=x^*} \\
 x' &= x^* + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=y'}
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

であるはずだと我々は推測した。 (x', y') は、 (x, y) を代入した場合の写像の結果であり、 x^* は、Symplectic 解法における、時間刻みの 2 次の項まで近似するための中間写像である。つまり、散逸写像である \tilde{y} と、 x^* との間には、相関関係がないために、 \tilde{y} は、上の式のような位置にくることになる。(4-2) 式は、擬 Symplectic 数値解法の基本的なアルゴリズムと思われるものであって決定的なものではないが、同様に⁶⁾ 4 次、6 次の擬 Symplectic 数値解法も導ける。また、近似を良くするため散逸写像の部分に 1 段法的な高次の解法を導入する⁷⁾。ただし 2 次は改良 Euler 法、3 次は Kutta の公式、4 次は Runge-Kutta 法を使う。ここまですを踏まえて、Symplectic 数値解法 1, 2, 4, 6 次と 1 段法的数値解法 1, 2, 3, 4 次との合成による高次の擬 Symplectic 数値解法を分岐図によって評価する。ここから Symplectic 項 2 次と散逸項 2 次の組み合わせならば、“S2_D2” と表示する。

5. 分岐図による高次の解法の評価

Duffing's equation (2-1) 式において、定数係数 b を変化させた場合の分岐図を示す。ここでも 6 次の Runge-Kutta 法を近似が最も良いものとして評価を行う。まず、擬 Symplectic 2 次の解法であるが (Fig. 1), S2_D2 は、Runge-Kutta 法と比較すると周期倍分岐やカオス領域、また不連続なステップ現象が起こる b の値を、ほぼ近似しているように見える。しかし、 b が 2.0 から 3.0 付近で見られる周期スイッチング現象 (周期解が b の値によって鋭敏に変化し、分岐図での軌道上を往復するようにプロットする) が起こる所の前後は、かなり不安定である。S2_D3 および S2_D4 は、カオス領域の始まる b の値が Runge-Kutta 法に比べ明らかに、ずれている。擬 Symplectic 4 次の解法であるが、擬 Symplectic 2 次に比べて全体的に良いようだが、一番近似が良い S4_D2 でも $b = 8.0$ 付近から Runge-Kutta 法とは、違う値をとっていく。擬 Symplectic 6 次の場合は、さらに近似が良くなっている。ここでも、2 次、4 次と同様に散逸項に改良 Euler 法を使った S6_D2 が良い。全体的に、Symplectic 項は 2 次、4 次、6 次と上げるとに近似が良くなるが、散逸項に適用する 1 段法的解法に関しては、2 次の解法である改良 Euler 法が有効といえる。

6. 散逸項が複雑な場合の評価

Duffing's equation より散逸項が複雑な場合を想定した非線形方程式を使って、さらに

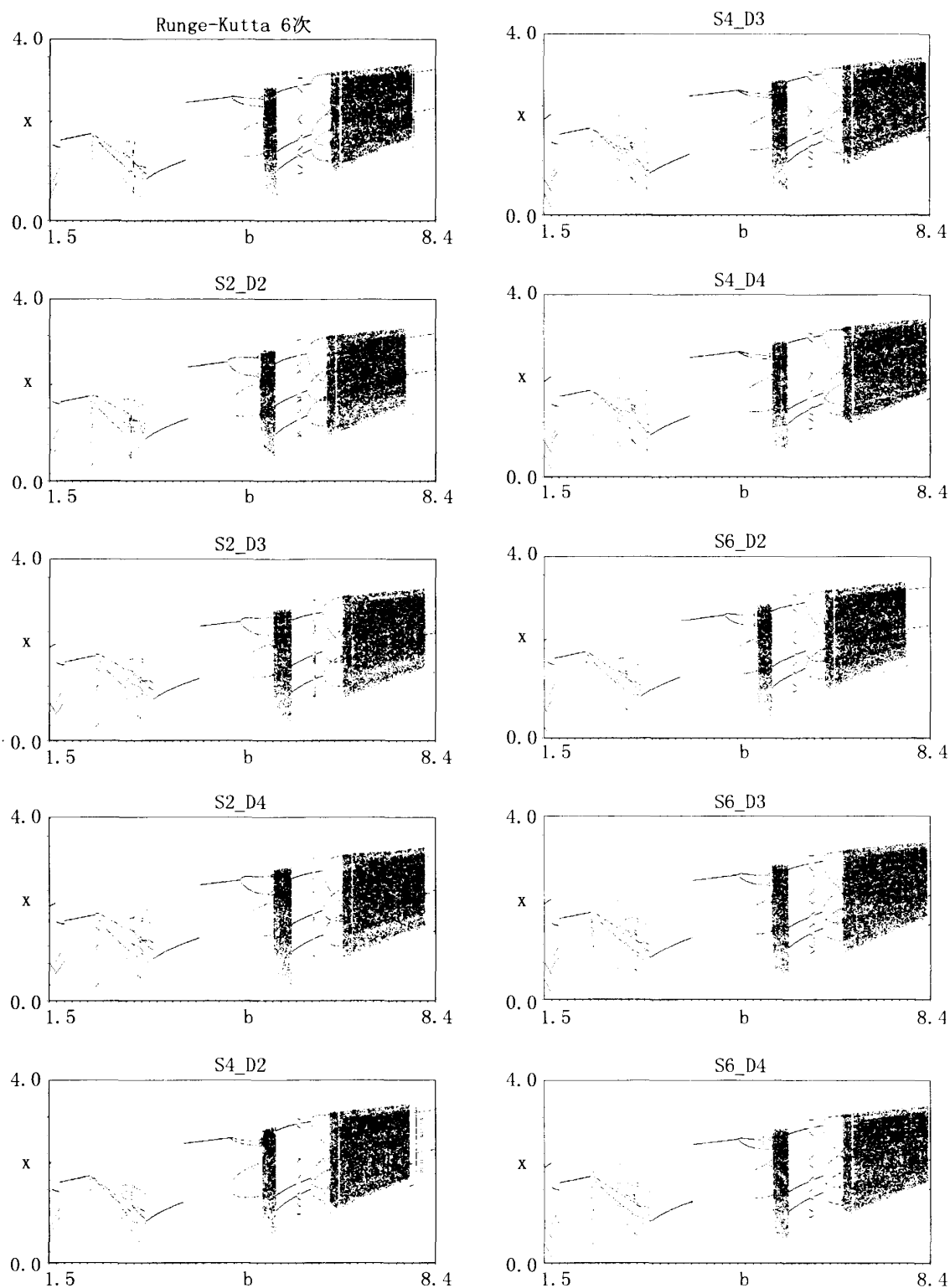


Fig. 1

擬 Symplectic 数値解法を吟味する。ここでは,

$$\ddot{x} + (h - \gamma \cdot x^2) \dot{x} + x^3 = b \cdot \cos t$$

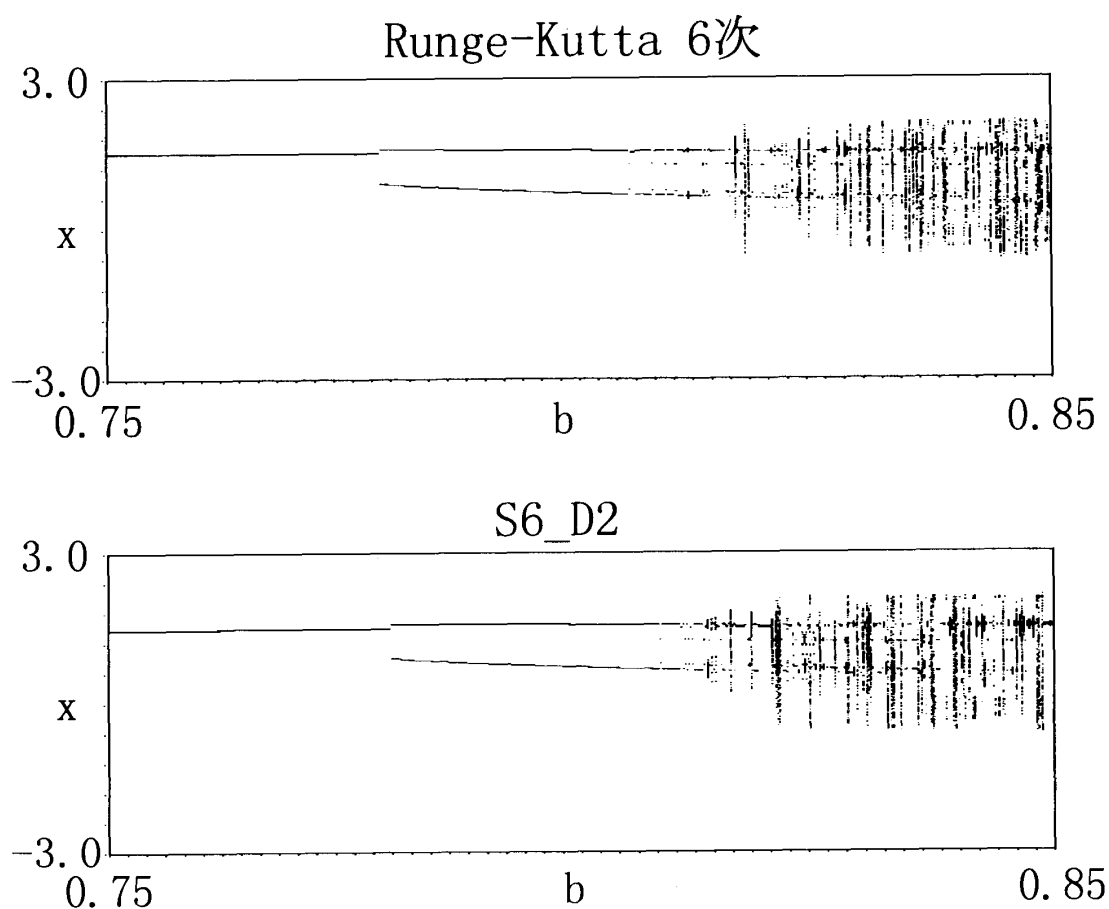


Fig. 2

の方程式⁵⁾を 5. と同様に分岐図において, Runge-Kutta 法と擬 Symplectic 解法の中で最も有効であった S6_D2 とで比較する (Fig. 2)。上式を Symplectic 項と散逸項に分けると

$$S = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{x^4}{4} \quad (6-1)$$

$$D = -(h - \gamma \cdot x^2) \cdot \dot{x} + b \cdot \cos t \quad (6-2)$$

となり, (6-1) 式は Duffing's equation のそれと同じである。ここで, $h = 0.1$, $\gamma = 0.1$ とする。Fig. 2 からわかることは, 分岐のおおよその傾向は表現しているが, 特にカオス領域では, とても厳密とはいえない。だが, 散逸項の近似法として改良 Euler 法をさらに修正する方向で考えていけると思う。

7. 考 察

擬 Symplectic 数値解法の長所は前回と同様, 打ち切り誤差を防げることである。そのため, 低次の解法でも比較的良く近似を行える。しかし擬 Symplectic 数値解法を Lyapunov 指数⁸⁾から導かれる Lyapunov 次元⁹⁾を使ってその数値をみると, かなり値がばらつく。恐

らく離散的な解法のため Lyapunov 指数への収束の仕方が荒くなっているためだと思われる。今回の、高次の擬 Symplectic 数値解法を導くにあたって、ハミルトニアンと散逸項を分けてそれぞれの次数を上げて合成する方法を行ったが、散逸項の部分を 1 段法的解法で次数をただ上げていけば良いというものでもなく、2 次の改良 Euler 法の近似が一番良かったことが、擬 Symplectic 高次の解法確立の手掛かりになると思われる。また、ここでは示さなかったが、Poincare プロットよりも分岐図において一致する部分が多いところも興味深い。ただし、6. で示したが、散逸項が複雑になればなるほど近似が悪くなるため、もっと系統的に高次の解法を研究しなければならない。このような結果が出た原因として考えられるのは、Symplectic 数値解法は打ち切り誤差を生じさせない、つまり面積保存写像のために、多様体上のプロットの間隔が一定ではないが、1 段法的数値解法は間隔が一定であるため単純にそのふたつの解法の合成では信頼出来る高次の擬 Symplectic 数値解法は導けないと予想される。また、この論文では、6 次の Runge-Kutta 法を比較の対象としたが、この解法は誤差が一定に評価できないため、評価それ事態が定性的でしかない。したがって今後、別の方法も導入すべきであろう。

8. 結論と課題

ここでの成果は、1 次の擬 Symplectic 数値解法のアルゴリズムを確立したこと。分岐図において、高次の擬 Symplectic 数値解法を導く手掛かりを得たこと、が主である。課題としては、高次の解法の理論的な側面からの導入、時系列を解析するため、精度保証付数値計算法¹⁰⁾を利用する、などである。また、Symplectic 保存のアルゴリズムは、ほかの数値計算法やカオスにおける定理などに応用できる可能性が高いため、それらの開発も考えられる。

参考文献

- 1) 石井一夫・下山大徳・白濱直哉：Symplectic 数値解法による散逸系及び不規則軌道の安定性の評価，岡山理科大学紀要，No. **31A**，79-89 (1995)．
- 2) A. J. Dragt, in Physics of High Energy Accelerators, proceedings of the Summer Shool on High Energy Particle Accelerators, Fermilab, 1981, edited by R. A. Carrigan, I. R. Huson, and M. Month (AIP Conf. Proc. No. **87**) (AIP, New York, 1982), p.147
- 3) A. Tsonis CHAOS (Plenum Press) etc.
- 4) D. Sarafyan, Journal of Math. Analysis and Appli. **40**, 436-445 (1972)．
- 5) 合原一幸著，カオス (講談社) 他
- 6) 吉田春夫，数理科学 No. **384**，June 37-46 (1995)．
- 7) 川上一郎著，数値計算 (岩波書店)
- 8) A. Wolf et all. Physica **16D** 285-317 (1985)．
- 9) 合原一幸編著，カオス (サイエンス社)
- 10) 大石進一，数理科学 No. **348**，June 48-52 (1992)．

The introduction of higher order Pseudo-symplectic algorithm in nonlinear oscillation systems

Kazuo ISHII, Hironori SHIMOYAMA and Naoya SHIRAHAMA

Department of Applied Physics,

Faculty of Science,

Okayama University of Science,

Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received October 7, 1996)

In this paper, we obtain the algorithm of fundamental Pseudo-symplectic numerical solution which is modified the Symplectic solutions in dissipative systems, and imply the higher order Pseudo-symplectic solutions with considering oscillation systems. That consists of symplectic terms and dissipative terms. And, it is known that the higher order Symplectic numerical solutions exist. Therefore, it is easy to lead to the higher order Pseudo-symplectic solutions on symplectic part. However, that is incorrect as it is. Accordingly, we apply to the second order Euler method on its dissipative part. This method is more effective as higher order solutions on bifurcation diagram.