

離散フーリエ変換によるフーリエ変換の計算

—— 計算時間に関する一検討 ——

入 江 浩 一

岡山理科大学工学部情報工学科

(1995年9月30日 受理)

1. ま え が き

離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform, DFT) とは, N 個の複素データ系列

$$\{f_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

に対して

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp(-j2\pi nk/N),$$
$$F_k = F_{N+k} = F_{2N+k} = \dots, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

により定義される変換である。DFT に対する効果的な計算法として FFT (Fast Fourier Transform) アルゴリズムがあることはよく知られている。しかし, DFT をフーリエ変換の計算に利用する際には, いつでも N 個すべての F_k が必要というわけではない。このような場合を例えて次のように表現している。「いくら良いソーティングのプログラムがあるからといって, 1万個のものの中から上位5位のものまでを求めようというときにソートしてから上位5位を選ぶというのは無駄だ, というのに少々似ている。」¹⁾

筆者はこれまでに, デジタル通信における PSK (Phase Shift Keying) 信号の周波数スペクトルが非線形増幅器によってそのサイドローブが増大する問題 (隣接チャンネルへの干渉として問題となる) において, 問題の特性をうまく利用すれば, 直接 DFT の計算によっても FFT によるよりも時間を短縮できることを示した^{2),3)}。

本論文ではまず最初に, DFT とフーリエ変換ならびにフーリエ級数との関係を整理し, 後に DFT の数値計算に際してあらわれるパラメータの意味を明らかにする。次に, 積分によりフーリエ変換の求められる例として, 方形パルス, 3角パルス, 余弦パルス, 二乗余弦パルスについて (いずれも孤立パルス), DFT のパラメータ (仮想周期と波形のサンプリング時間幅) と数値計算誤差の関係 (孤立波形ではフーリエ変換は無限の周波数成分をもつ。DFT によるフーリエ変換の計算は, どのように仮想周期を大きくとっても近似計算に過ぎない。), および本提案の DFT 計算と FFT とで計算時間の比較を行う。

2. フーリエ変換と DFT の関係

2.1 DFT によるフーリエ変換の計算の基礎

波形 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(f)$ は

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (2)$$

である。 $f(t)$ が区間 A の外側ではゼロであると考えると (孤立波形), (2) 式は

$$F(f) = \int_{-A/2}^{A/2} f(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (3)$$

となる。ここで $T > A$ となる適当な定数 T を仮定して, $f(t)$ から周期波形 $f_T(t)$ をつくる (図 1)。 $f_T(t)$ は周期波形であるから, 次のフーリエ級数に展開が可能である。

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2\pi k f_0 t), \quad f_0 = 1/T \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4)$$

一方, $f_T(t)$ と $f(t)$ の間には $f_T(t)$ の定義から

$$f(t) = f_T(t), \quad -A/2 \leq t \leq A/2 \quad (5)$$

の関係がある。よって, (4) 式と (5) 式とより

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2\pi k f_0 t), \quad f_0 = 1/T \quad (-A/2 \leq t \leq A/2) \quad (6)$$

である。フーリエ係数 c_k は (4) 式より

$$c_k = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

であるが, (5) 式の関係を用いると,

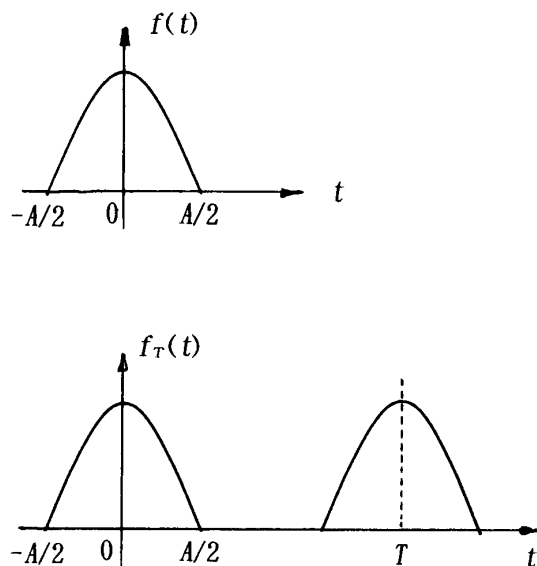


図 1. 孤立波形 $f(t)$ から生成される周期形 $f_T(t)$

$$c_k = 1/T \int_{-A/2}^{A/2} f(t) \exp(-j2\pi k f_0 t) dt$$

となる。これと(3)式を比較すると

$$T c_k = F(k f_0) \tag{7}$$

が得られる。すなわち、連続スペクトルの周波数サンプル値 $F(k f_0)$ は、適当な周期 T を仮定してフーリエ係数 c_k から得られる。

$f_T(t)$ の1周期 T を N 等分する等間隔サンプリングでは、サンプリング時間間隔 T_1 は

$$T_1 = T/N$$

である。 $t = n T_1$ としてフーリエ級数の離散時間表現は(4)式より

$$f_T(n T_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2\pi k f_0 n T_1)$$

であるが、

$$f_0 T_1 = f_0 T/N = 1/N$$

の関係により

$$f_T(n T_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(j2\pi k n / N) \tag{8}$$

となる。 $f_T(n T_1)$ は n について周期 N をもつ (図2)。また、 $\exp(j2\pi k n / N)$ は n についても k についても周期 N をもつ。よって(8)式から、 c_k も周期 N をもつことになる。したがって、1周期の範囲では

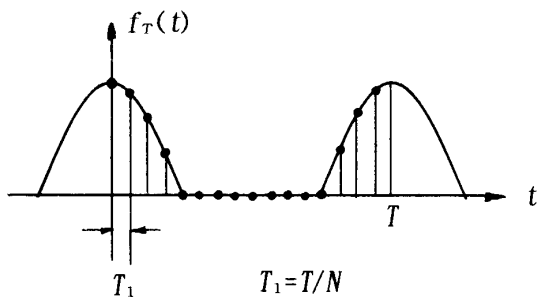


図2 等間隔サンプリング

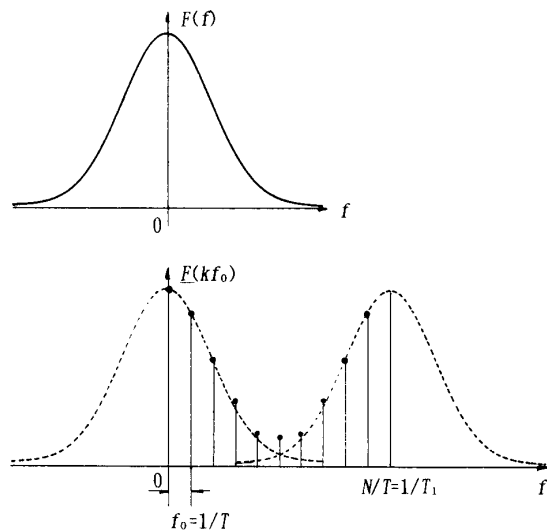


図3 エリアシングと周波数分解能

$$f_T(nT_1) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{c}_k \exp(j2\pi kn/N), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

である。一般には \underline{c}_k は c_k に等しくない。その理由は次の2つである。

- (1) 任意の T , N ではサンプリング定理の条件(サンプリング時間間隔と周波数帯域との関係)を満たしてない場合がある。
- (2) 有限時間の波形のスペクトルは無限大の周波数成分を含む。したがって、どんなに T を大きくとってもスペクトルは重なり(図3), とくに、周波数の高くなるほど誤差(エリアシング誤差)の割合は大きくなる。つまり、DFTによるフーリエ変換の計算は近似に過ぎない。

$T = 1/f_0$ であるから, T はスペクトルの周波数分解能を決める。波形の時間分解能(サンプリング間隔) $T_1 = T/N$ はスペクトルの周期 $F = 1/T_1$ を決める。まとめると,

$$\begin{array}{llll} N \text{一定で } T \rightarrow \text{大} & : & \text{周波数分解能} \rightarrow \text{小}, & \text{エリアシング誤差} \rightarrow \text{大} \\ & & T \rightarrow \text{小} & : \quad \quad \quad \quad \rightarrow \text{大}, \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \text{小} \\ T \text{一定で } N \rightarrow \text{大} & : & \text{周波数分解能は一定}, & \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \text{小} \\ & & N \rightarrow \text{小} & : \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \text{大} \end{array}$$

よって、「 T も N もある程度以上大きくとる必要がある。」

2.2 フーリエ係数と DFT の関係

フーリエ級数の(9)式と DFT の変換対

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j2\pi kn/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ f(n) &= 1/N \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp(j2\pi kn/N), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

を比較することにより

$$\underline{c}_k = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j2\pi kn/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

が得られる。ただし, $f_T(nT_1)$ をあらためて $f(n)$ とおいた。これがフーリエ係数と DFT の関係である。よって,

$$\underline{F}(kf_0) = T/N \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp(-j2\pi kn/N), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

T/N は定数であり, 通常, $\underline{F}(kf_0)$ を $k = 0$ での値で規格化するから, この定数の値は直接はおもてに現れない。

3. DFT によるフーリエ変換の計算のアルゴリズム

1) まず、計算の便宜のため、 $f(t)$ を偶関数にとる。これにより、フーリエ変換が実数となり、虚数部の計算の手間がはぶける。

2) 図2からわかるように、 $f(n)$ の値は大部分ゼロである。そこで、(11) 式の Σ を $f(n)$ がゼロでない部分2つにわけるとすなわち、 $M = A/T_1$ として

$$\sum_{n=0}^{N-1} \rightarrow \sum_{n=0}^{M/2} + \sum_{n=N-M/2}^{N-1}$$

さらに、後者の n に関する Σ を平行移動して $n' = 0$ から $M/2 - 1$ とする。これにより、積の計算の回数の低減、不要な \cos の値の計算カット、配列容量の低減が期待できる。

3) 求める k の範囲はどんな場合も $k \leq N/2$ でよい。 k の N に関する周期性により、 $F(kf_0)$ は $0 \leq k \leq N/2$ と $N/2 \leq k \leq N$ は同じパターンとなるからである。ここでは、スペクトルの第3サイドローブまでを理論値と DFT による値とを比較することにする。

PSK 波の非線形性によるスペクトル変化の問題では、第1サイドローブの値の変化を知れば十分である。よって、この場合は特定の k の値1個についての計算ですむ。現実には k の値を事前に特定することは困難であるから、すくなくとも数点の k の値で計算する必要がある。

いずれにせよ、問題の特性に応じて計算する k の範囲をしぼることが、計算時間短縮に直接関係する。

4. 計算結果

フーリエ変換が数学的に積分で計算できる方形波、三角波、余弦波、二乗余弦波の4種

表1 DFT によるフーリエ変換計算の精度と計算時間

WAVEFORM	DFT PARAMETER			TIME (sec)	ERROR (%)		
	k	N	M		1st SL	2nd SL	3rd SL
RECTANGULAR	16	128	32	2.5	0.724	2.016	3.967
		256	64	4.9	0.181	0.503	0.986
		512	128	9.6	0.045	0.126	0.246
TRIANGULAR	32	128	32	4.8	2.466	8.434	17.35
		256	64	9.6	0.610	2.033	4.030
		512	128	19.0	0.152	0.503	0.990
COSINE	16	128	32	2.5	1.230	2.944	5.306
		256	64	4.8	0.322	0.726	1.295
		512	128	9.6	0.080	0.181	0.322
SQUARE-COS	20	128	32	3.0	0.013	0.089	0.564
		256	64	6.0	0.001	0.005	0.015
		512	128	12.0	0.000	0.000	0.001

SL : Side Lobe

表2 FFTによるDFTの計算時間

WAVEFORM	DFT PARAMETER		
	$N=128, M=32$	$N=256, M=64$	$N=512, M=128$
RECTANGULAR	2.4	5.6	12.5
TRIANGULAR	2.5	5.6	12.5
COSINE	2.4	5.6	12.5
SQUARE-COS	2.4	5.6	12.5

(単位：秒，精度： ± 0.1 秒)

表3 本方式とFFTの計算時間の比較

N	k	PROPOSED METHOD		FFT	
		CALCULATED $b(k+1)N/4,$ $b=0.00449$	MEASURED	CALCULATED $a 2N \log_2 N,$ $a=0.00136$	MEASURED
128	16	2.45	2.5	2.44	2.4
	20	3.02	3.0		
	32	4.75	4.8		
256	16	4.89	4.8, 4.9	5.57	5.6
	20	6.05	6.0		
	32	9.50	9.6		
512	16	9.79	9.6	12.5	12.5
	20	12.09	12.0		
	32	19.00	19.0		

の波形についての計算結果を表1に示す。表をみる上で注意事項を以下に列記する。

- 1) DFTにおける k の範囲は、それぞれのスペクトルの第3サイドローブまでとした。
- 2) サイドローブのピークは厳密なピークではない。DFTでは離散値を取り扱い、離散値の中でのピーク値である。比較の対象のフーリエ変換の値も当然同じ周波数での値である。
- 3) M はパルス幅の等間隔サンプリング数、 N は仮想1周期のサンプリング数である。仮想周期はパルス幅の4倍としている。 M, N を増すことは、周波数分解能は一定であるが、エリアシング誤差を減らすことを意味する。
- 4) 計算時間の測定は、同じ計算を10回繰り返し、データの入出力に要する時間を除いて秒単位での表示を利用した。従って、 ± 0.1 秒の誤差がある。また、秒単位で表しているが、時間の絶対値を問題としているのではなく、相対値を問題にしている。

表1から次のことがわかる。

- (a) 誤差はサンプリング数(M, N)を2倍すると1/4に減少する。
- (b) 誤差の絶対値は波形のスペクトル特性(絶対値, 減衰の速さ)に関係するので、同じサンプリング数でも波形によりかなり異なる。とくに、二乗余弦波のスペクトルは周波数の増大とともに急速に低減する特徴がよくあらわれている。

(c) 計算時間はサンプリング数 N に比例し、 $k+1$ に比例する。これは計算量の考察から容易に理解できる。(後述)

次に、同じ計算を FFT で行なう。FFT のプログラムは自作のものでなく、世の中一般的なものとして文献 4) のものを選んだ。FFT による計算時間を表 2 に示す。当然のことながら、同じ計算を別の方法で行うだけであるから、数値計算の結果は変わらない。FFT の場合は計算時間は波形によらず、 N によってのみ決まる。前述の DFT の場合に波形によって計算時間が変わったのは、所望の k の値が変わったためである。

5. 計算時間に関する検討

FFT の計算量の理論から、計算時間は $2N \log_2 N$ に比例する⁵⁾。3 個の測定値から比例定数を求めると 0.00136 が得られる。この式による計算時間を表 3 に並記してあるが、非常によい精度で測定値と一致している。

本方式の DFT では、掛算の回数は $(k+1)M$ である。ここでは、 $M = N/4$ としているから、これは $(k+1)N/4$ となる。計算時間が $(k+1)N/4$ に比例するとして、表 1 の測定値から比例定数を求めると 0.00449 となる。この式による計算値と測定値の比較を表 3 に示す。これも非常によい一致を示している。

FFT と本方式とでの計算時間の比較は、アルゴリズムが異なるので簡単ではない。測定結果のみ表 3 に並記しておく。

6. む す び

本文では k の範囲としてスペクトルの第 3 サイドローブまで求めるとしたものである。本文で検討した $N = 4M$ の場合には、スペクトルの第 1, 第 2, 第 3 ピークにあたる k の値は次のようになる。方形波： $k = 6, 10, 14$, 三角波： $k = 11, 20, 28$, 余弦波： $k = 8, 12, 16$, 二乗余弦波： $k = 9, 14, 18$ 。非線形増幅器による PSK 波のスペクトル増大による干渉の問題などでは、第 1 サイドローブのピークがわかれば十分である。問題によっては、必要な k の範囲をしばり、計算時間の短縮が可能である。

参考文献

- 1) 伊理正夫, 藤野和建: 数値計算の常識, 共立出版 (1985).
- 2) 入江浩一: 増幅器の非線形性による PSK 信号スペクトル劣化の一計算法, 平成 6 年度電気・情報関連学会中国支部連合大会.
- 3) 入江浩一: 非線形増幅器による PSK 信号スペクトル変化の一計算法, 電子情報通信学会論文誌 B-II Vol. J 78-B-II, No. 9, pp.625-627 (Sep.1995).
- 4) 佐川雅彦, 貴家仁志: 高速フーリエ変換とその応用, 昭晃堂 (1992).
- 5) 大野豊, 磯田和男鑑修: 新版数値計算ハンドブック, p.918, オーム社 (1990).

Calculation of Fourier Transform by Means of Discrete Fourier Transform

— Discussion on Required Time for Calculation —

Koichi IRIE

Department of Information and Computer Engineering

Faculty of Engineering,

Okayama University of Science,

Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1995)

The FFT algorithm is usually used for computing actual DFT problems because of its extremely fast computing function. However, some DFT applications do not require to get all DFT components. An example is calculation of Fourier Transform by means of DFT, where, in addition, a great serial part of discrete time data sampled from a given waveform is occupied with zero. By utilizing these two features the time required for calculation with basic DFT is much reduced to a measure comparable with that of the FFT.

With rectangular, triangular, cosine and squared-cosine waveform, calculation time in connection with numerical accuracy obtained are shown of the proposed method, and are compared with those of the FFT.