PGTのKerr-Newmanチェーンの時空構造

——近日点移動におけるPGT補正——

小山新一朗・中力眞一*
岡山理科大学大学院理学研究科応用物理学専攻
*岡山理科大学理学部応用物理学科

(1995年9月30日　受理)

Poincaréゲージ理論(PGT)は，ある条件の下に，Einstein-Maxwell(EM)理論に帰着されることが分かっている。これを利用して，EM理論の代表的な解であるKerr-Newman解に同形なPGTの一連の厳密解が得られている。この論文では，これらの解の内で，その時空構造が知られていない一つの解に注目し，その構造の一端の調査を兼ねて，その時空内でのテスト粒子の運動を議論する。結果として，我々はテスト粒子の近日点移動について，Einstein理論からの予想に加えて新たなPGT補正項を得た。

1. Introduction

Poincaréゲージ理論は，よく知られているように，最初R. Utiyama[1]によって重力のゲージ理論として提起され，T.W.B. Kibble[2]によって本来のPoincaréゲージ理論としての形に完成され，その後K. Hayashi[3]によって10個のパラメタを含むより一般的な形へと拡張された。

Hayashiの10個のパラメタは，本来，自然(実験)との比較によって決められるべきものであるが，

1. すべてのパラメタをフリーにして解くことは，大変難しい。
2. 10個全てが独立であるとは物理的にも数学的にも考えにくい*。
3. パラメタの選択に依存しないPGT固有の性質がある[5]。

等の理由から，Einstein理論にコンパチブルな非常に簡単なモデルが提案され[6-8]，その特解が2，3求められている。この論文では，それらの解の内でEinstein-Maxwell理論において知られるKerr-Newman解に同形な一連のPGTの厳密解[9]の中でその時空構造が知られていない一つの解に注目し，その構造の調査を兼ねてその時空内でのテスト粒子の運動を議論する。

* 数学的には，現在の所，拡張Bach-Lanczos恒等式のために9個だけが独立であることが分かっている[4]が，物理的には，諸説あるが決定的なものはない。その最大の原因は実験と直接比較できる結果がないことによる。

我々の扱う解の時空構造は，一般に次式によって与えられる計量（メトリック）によって決定される†。

$$ds^2 = \rho^{-2}\Delta[dt - l\sin^2\theta\, d\varphi]^2 - \rho^2\Delta^{-1}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^{-2}\sin^2\theta[(r^2+l^2)d\varphi - l\, dt]^2 \quad (1.1)$$

ここで，$\vec{\mathfrak{Q}} = \vec{Q}_1 + i\vec{Q}_2$，$\rho^2 = r^2 + l^2\cos^2\theta$，$\Delta = r^2 - 2Mr + l^2 + q_*^2$ である。ただし，q_*^2 は，我々の場合には，Kerr-Newman 解の電磁的な電荷とは違い，２種類のゲージ電荷 $\vec{Q}_1$ と $\vec{Q}_2$ とから

$$q_*^2 \equiv 2(a_1 + a_3)(\vec{Q}_2^2 - \vec{Q}_1^2) \quad (1.2)$$

と定義された量である。また，M，l は各々，重力物体（ソース）の質量，単位質量当たりの角運動量である。

この論文では，この一般的な解の内，簡単のために $l = 0$ のときの時空のみを考えることにする。このときの時空は，２つのゲージ電荷 $\vec{Q}_1$，$\vec{Q}_2$ の取り得る値によって次の３種類の構造に分けられる。即ち，

1．$\vec{Q}_2^2 > \vec{Q}_1^2$ のとき Reissner-Nordström 時空
2．$\vec{Q}_2^2 = \vec{Q}_1^2$ のとき Schwartzschild 時空
3．$\vec{Q}_2^2 < \vec{Q}_1^2$ のとき Schwartzschild 的時空

この内，ここでは，時空構造が知られていない３の場合を取り上げ以後の議論を進めて行くことにする。

2．テスト粒子の運動

2．1．運動方程式

一般に，与えられた時空内でのテスト粒子の運動は，その時空内の時間的測地線によって記述される。従って，今の場合，テスト粒子の運動は(1.1)のため次の Lagrangian $\mathfrak{L}$ により決定される。

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}[r^{-2}\Delta\dot{t}^2 - r^2\Delta^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\, d\dot{\varphi}^2] \quad (2.1)$$

この Lagrangian を用いて粒子の運動方程式は，普通の様に Euler-Lagrange の方程式により求められる。

先ず，t, φ についての式より

$$p_t = \frac{\Delta}{r^2}\dot{t} = \text{const.} \equiv E \quad (2.2)$$

$$p_\varphi = r^2\dot{\varphi} = \text{const.} \equiv L \quad (2.3)$$

---

† ここでは参考文献９の記法を用いている。

ここで，ドットは固有時間 τ についての微分を表わしている。また，E と L は各々粒子のエネルギーと角運動量を表すパラメタである。

次に，θ についての式より $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ と初期条件を選んで，これを解くと $\theta = \pi/2$ と求まり，テスト粒子は，常に $\theta = \pi/2$ の平面内にあり，運動は $\theta = \pi/2$ の面内で起こることが分かる。

最後に，r についての式であるが，これは Euler-Lagrange の方程式を用いる事から，光速を単位とする $c = 1$ 単位系を採用して，(2.1)式より

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} = \text{const.}$$

であることが分かるので，(2.2)と(2.3)を(1.1)へ代入して得られる次の一階の方程式を用いる方がベターである。

$$\dot{u}^2 + u^6 \varDelta (1 + L^2 u^2) = E^2 u^4 \tag{2.4}$$

但し，ここで，慣習に従って $u = 1/r$ と置いた。

この式と(2.3)式とを組み合わせて，軌道の式が得られる。

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = |q_*{}^2| u^4 + 2Mu^3 - \left(1 - \frac{|q_*{}^2|}{L^2}\right) u^2 + \frac{2M}{L^2} u - \frac{1-E^2}{L^2} \equiv f(u) \tag{2.5}$$

ここで，右辺を $f(u)$ と置いた。

ところで $f(u)$ は u についての四次式であるため

$$f(u) = |q_*{}^2| (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)$$

と書ける。これを元の式と比較して，次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\dfrac{2M}{|q_*{}^2|} \\ u_1 u_2 u_3 u_4 \qquad\quad = -\dfrac{1-E^2}{|q_*{}^2| L^2} \end{cases}$$

この下の式から特に，$E^2 < 1$ であるとき，u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ の内一つ（これを u_4 とする）は負でなければならないことが分かる。また，(2.5)式より，$f(u)$ は常に 0 か正でなければならないので，これを 0 とする u の値，即ち，u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ の取る値によって，（従って，E, L の値によって）軌道は分類される。つまり，運動は，$f(u)$ を正とする u の領域でのみ可能で，有限の u_i 間での束縛軌道と 0 と有限の u_i との間の非束縛軌道，そして有限の u_i と無限の u との間での相対論に固有な第 2 種軌道の 3 種類の軌道が考えられる。次の小節では，この内の束縛軌道に限って議論をすることにする。

2．2．束縛軌道（$E^2 < 1$）

前節での議論により，u_i の値が次の条件を満たすときのみ束縛軌道（古典論における Kepler

軌道に相当する）が存在することが分かる。

$$0 < u_1 < u_2 \leq u_3 \quad \text{かつ} \quad u_4 < 0 \tag{2.6}$$

この時,

$$u = \frac{1}{\ell}(1 + e\cos\chi) \tag{2.7}$$

と置くと，テスト粒子の運動は u を新しい変数 χ（これは相対論では角変数 φ に対するアノマリーと呼ばれている）の関数と考えれば，$\chi = \pi$ での u の値 u_1 を遠日点とし，$\chi = 0$ での u の値 u_2 を近日点とする周期運動として表される。また，u_3, u_4 はこの時

$$u_3 = -\left(\frac{M}{|q_*{}^2|} + \frac{1}{\ell}\right) + \sqrt{\left(\frac{M}{|q_*{}^2|} + \frac{1}{\ell}\right)^2 + \frac{\ell^2}{1-e^2}\frac{1-E^2}{|q_*{}^2|L^2}}$$

$$u_4 = -\left(\frac{M}{|q_*{}^2|} + \frac{1}{\ell}\right) - \sqrt{\left(\frac{M}{|q_*{}^2|} + \frac{1}{\ell}\right)^2 + \frac{\ell^2}{1-e^2}\frac{1-E^2}{|q_*{}^2|L^2}}$$

によって与えられることに注意すると，$f(u)$ の定義式により次の関係式が得られる。

$$\frac{1-E^2}{L^2} = \frac{1}{\ell^2}[\ell - 4\mu - (3+e^2)\lambda - \kappa](1-e^2) \tag{2.8}$$

$$\frac{M}{L^2} = \frac{1}{\ell}[1 - (3+e^2)\mu - 2(1+e^2)\lambda - \kappa] \tag{2.9}$$

ここで，μ, λ, κ は，次のように定義された量である。

$$\mu \equiv \frac{M}{\ell}, \quad \lambda \equiv \frac{|q_*{}^2|}{\ell^2}, \quad \kappa \equiv \frac{|q_*{}^2|}{L^2}$$

また，$f(u)$ は，

$$f(u) = \frac{e^2}{\ell^2}(1-\cos\chi^2)[-\lambda e^2(1+\cos^2\chi) - 2e(\mu+2\lambda)\cos\chi - (6\lambda+6\mu+\kappa-1)] \tag{2.10}$$

と書かれる。

一方，(2.7)により

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{\ell}\sin\chi\frac{d\chi}{d\varphi} \tag{2.11}$$

であることに注意すると，変数 χ と φ との間の関係式(2.5)により次式によって与えられることが分かる。

$$\pm\frac{d\chi}{d\varphi} = \left[\{1+2(e-3)\mu - 2(e^2-2e+3)\lambda - \kappa\}\left(1 + k_2{}^2\cos^2\frac{\chi}{2}\right)\left(1 - k_1{}^2\cos^2\frac{\chi}{2}\right)\right]^{1/2} \tag{2.12}$$

但し，ここで k_1, k_2 は次式によって定義された量で，共に 1 か 1 以下の量である。

$$k_1{}^2 = \frac{2\lambda e}{\sqrt{[(\mu+2\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda e^2 - 6\lambda - 6\mu - \kappa)]} - (\mu + 2\lambda - e\lambda)} \leq 1 \tag{2.13}$$

$$k_2{}^2 = \frac{2\lambda e}{\sqrt{[(\mu+2\lambda)^2+\lambda(1-\lambda e^2-6\lambda-6\mu-\kappa)]}+\mu+2\lambda-e\lambda} < 1 \tag{2.14}$$

方程式(2.12)は，上の符号を選び

$$\frac{\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \psi$$

と置き，K を

$$K^2 = \frac{k_1{}^2+k_2{}^2}{1+k_2{}^2} \tag{2.15}$$

$$= \frac{4e\sqrt{(\mu+2\lambda)^2+\lambda(1-\lambda e^2-6\lambda-6\mu-\kappa)}}{1-6\lambda-6\mu-\kappa+2e\sqrt{(\mu+2\lambda)^2+\lambda(1-\lambda e^2-6\lambda-6\mu-\kappa)}} \leq 1 \tag{2.16}$$

と定義すると，次の形で積分される。

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{1-2(3-e)\mu-2(e^2-2e+3)\lambda-\kappa}}\frac{1}{\sqrt{1+k_2{}^2}}F(\alpha, K) \tag{2.17}$$

ここで，$F(\alpha, K)$ は Jacobi の楕円積分である。

$$F(\alpha, K) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-K^2\sin^2\alpha}}$$

ただし，α は ψ に代わって

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{1+k_2{}^2}\sin\psi}{\sqrt{1+k_2{}^2\sin^2\psi}}$$

によって定義された量である。また，積分定数は，$u = u_1$（遠日点）が $\varphi = 0$ となる様に選ばれた。

こうして，$E^2 < 1$ なる条件の下に(2.8)，(2.9)を満たすエネルギー E と角運動量 L を持つテスト粒子の束縛軌動は，アノマリー χ を媒介として式(2.7)および(2.17)によって決定されることが示された。次の節では，ここでの結果を用いて，よく知られている水星の近日点移動について，Einstein の相対論の予想との差異について議論したい。

3. The Post-Newton 近似

太陽程度の普通の天体では，質量 M は光速と重力定数を 1 とする単位系で測って高々数 km である。これに対して焦点から惑星の軌道までの垂線の長さ ℓ は，天体の半径が既に太陽で約 7×10^5 km であるので

$$\mu \equiv \frac{M}{\ell} \ll 1$$

と仮定することは極自然である。また，このとき，ゲージ電荷も $|q_*{}^2| < M$ であるので‡

‡ 我々がここで扱っている解はこの前提の下で導出された解である。

$$\lambda \equiv \frac{|q_*{}^2|}{\ell^2} \ll 1$$

と仮定できる。

これらの仮定の下に，(2.12)より

$$\frac{d\varphi}{d\chi} = -F(\mu, \lambda)$$

$$F(\mu, \lambda) = [-\lambda e^2(1+\cos^2\chi) - 2e(\mu+2\lambda)\cos\chi - (6\lambda+6\mu+\kappa-1)]^{-1/2}$$

と置いて，$F(\mu, \lambda)$ を $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ のまわりで展開し，

$$\begin{aligned} -d\varphi &= F(\mu, \lambda)\,d\chi \\ &= (1-\kappa)^{-3/2}\left[1-\kappa+3\mu+\frac{1}{2}e^2\lambda+3\lambda+e(\mu+2\lambda)\cos\chi+\frac{1}{2}e^2\lambda\cos^2\chi\right]d\chi \end{aligned}$$

更に，これを積分して，アノマリー χ と軌道の角変数 φ との間の関係が得られる。

$$-\varphi = \frac{1-\kappa+3(\lambda+\mu)+\frac{3}{4}e^2\lambda}{(1-\kappa)^{3/2}}\chi + \frac{(\mu+2\lambda)e}{(1-\kappa)^{3/2}}\sin\chi + \frac{e^2\lambda}{8(1-\kappa)^{3/2}}\sin 2\chi + \text{const.} \quad (3.1)$$

これにより，$\chi = \pi$ における φ の値を φ_{init} とし，$\chi = -\pi$ における φ の値を φ_{final} とすると，1 周期当たりの実際の軌道の角度のずれは，次式によって与えられる。

$$\varphi_{\text{final}} - \varphi_{\text{init}} = 2\frac{1-\kappa+3(\lambda+\mu)+\frac{3}{4}e^2\lambda}{(1-\kappa)^{3/2}}\pi \equiv 2\pi + \Delta\varphi \quad (3.2)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{1-\kappa-(1-\kappa)^{3/2}+3(\lambda+\mu)+\frac{3}{4}e^2\lambda}{(1-\kappa)^{3/2}} \quad (3.3)$$

この式は $\lambda = 0$, $\kappa = 0$ の時に，相対論に於ける水星の近日点移動についてのズレの予想と一致する。

4. おわりに

我々は，この論文において，Poincaré ゲージ理論の 2 種類のゲージ電荷 $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ と質量 M を有する物体が，真空中に作る球対称な場の振舞を調査する目的で，その場内でのテスト粒子の運動を論じてきた。

テスト粒子の軌道は，エネルギー E と角運動量 L の値によって，束縛軌道，非束縛軌道，そして相対論固有の第 2 種軌道にとに分類される。この内，ここでは古典論との対比という点に重きを置いて，束縛軌道に限って議論した。その結果，我々はテスト粒子の軌道の式を導出し，軌道の近日点移動について，Schwartzschild の場合に予想される値より更にズレるという結果を得ることができた。

最後に，その他のテスト粒子の軌道についての調査やもっと詳細な場の振舞についての調査は今後の課題としたい。

References

1) R. Utiyama, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).
2) T.W.B. Kibble, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).
3) K. Hayashi, Prog. Theor. Phys. **39**, 494 (1968).
4) K. Hayashi and T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **65**, 525 (1981).
5) S. Nakariki, J. Math. Phys. **32**, 1612 (1991).
6) K. Fukuma, S. Miyamoto, T. Nakano, T. Ohtani and Y. Tamura, Prog. Theor. Phys. **73**, 874 (1985).
7) S. Nakariki, Prog. Theor. Phys. **81**, 523 (1989).
8) S. Nakariki, in *Proceedings of the 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* edited H. Sato and T. Nakamura (World Scientific Pub., 1992) 511.
9) S. Nakariki, M. Beppu and Y. Kazama, Bulle. Okayama Univ. Science, **29A**, 67 (1994).
10) M.A. Melvin, Phys. Letters **8**, 65 (1964).

Spacetime Structure of Kerr-Newman-like Solutions in PGT

— PGT Correction of Perihelion Precession —

Shin-ichiro KOYAMA, Shin-ich NAKARIKI

Department of Applied Physics,
Faculty of Science
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1995)

In this paper we consider one of Kerr-Newman-like solutions of *complex* Einstein-Maxwell equations in Poincaré gauge theory, and investigate the behavior of a test particle in its spacetime. As a result, we get a PGT correction of perihelion precession of the planetary orbits.