

電気回路論の擬弾性緩和解析への応用

岩 崎 義 光

岡山理科大学理学部応用数学科

(1995年9月30日 受理)

1. はじめに

応力と歪の間の比例関係である弾性は、力 F と変形量 D の間の比例関係

$$F = (\text{const.})D \quad (1.1)$$

を導入した、17世紀の Hooke の仕事にまでさかのぼる¹⁾。しかしながら、たとえ微小応力といえども、与応力に対して歪が一意に決まらなかったり、周期的変動応力に対して歪に位相遅れが生じたりして、Hooke の法則(1.1)はかならずしも成立しない。元来、Hooke の法則は準静的な力、十分時間をかけて与えられた力の結果生ずる変形に対して成り立つ関係である。衝撃的なパルス状の力の場合には、固体中を力の波(弾性波)が伝播する。このときの力と変形の関係は、力の波が固体の端で反射し戻ってくるまでの間は

$$\frac{dD}{dt} = (\text{const.})F \quad (1.2)$$

と記述される。

19世紀初期には準静的という条件の排除を問題とした。固体を微小エレメントに分解し、隣接エレメントから力を受けて各微小エレメントが変形すると考えた。微小エレメントの形状変化、変形は歪 ε で表され、Hooke の法則はこの微小エレメントに働く単位面積当たりの力すなわち応力 σ と歪の比例関係となる。固体中を伝播する弾性波に対して応力は微小エレメントに関する Hooke の法則と運動方程式から決まる²⁾。簡単のため一端を固定したワイヤの他端に力を加える場合を取り上げると、力が準静的に与えられれば、微小エレメントの元の長さ dx が、微小エレメントの両端に逆向きで大きさの等しい応力を生ずるとして、変形後長さ du になったとすると歪は

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - 1 \quad (1.3)$$

となり、応力との間に

$$\sigma = M\varepsilon, \quad \varepsilon = J\sigma \quad (1.4)$$

$$J = \frac{1}{M} \quad (1.5)$$

の Hooke の法則が成り立つ。ここに、 M を弾性率、 J をコンプライアンスという。一方、

微小エレメントに関する運動方程式は

$$m\ddot{u} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.6)$$

である。ここに、 m は変形前の単位長さ当たりの固体の質量である。境界条件と合わせて、与えられた力 F に対するワイヤの応答は記述されることになる。弾性の古典論では応力に対して式(1.4)で一意に決まる歪を問題にした。ところが、Weber は1825年ガルバノメータの負荷を除去しても指針の変位は即座には0に戻らず、漸近的に0に戻る現象を見だし³⁾、弾性余効と名づけた。その他にも弾性とは異なる性質として、準静的なものに、負荷応力に対して徐々に歪の増大するクリープ現象、一定歪を与えたとき応力が時間とともに減少し平衡応力に至る応力緩和、動的なものに、内部摩擦、弾性率やコンプライアンスの振動数依存性がある。

固体に与えられた応力が永久変形(塑性変形)を与えない範囲の微小応力であっても、上記の弾性とは異なる性質が固体にあって、これを Zener は擬弾性と呼んだ⁴⁾。擬弾性に起因する内部摩擦という物理量は、擬弾性緩和現象のミクロな素過程を反映する物理的統計量であり、かつ非破壊測定可能な物理量である。破壊的ではあるが直接ミクロな構造に迫りうる電子顕微鏡観察とは相補的な役割をもち、応用面では、新材料が登場するたびに内部摩擦が取り上げられ、その意義は衰えない。

擬弾性や内部摩擦の物理に関しては多くの仕事があり⁴⁻⁶⁾、1970年から80年代にピークがあり、物理的理論づけも進んだのであるが、理論の一般化、体系化の点では不十分なところがあり、物理的概念を背景とした数理的体系化が必要である。著者は擬弾性緩和の数理として最近一連の報告をしている⁷⁻¹⁰⁾。本論では擬弾性多重緩和のスペクトル分解に絞って論ずる。多重緩和のスペクトル分解は緩和時間と緩和強度の対応づけのことで、異なる緩和時間の緩和現象につき緩和時間と緩和強度の対応を与えることである。すなわち、多重緩和を異なる緩和時間の単一緩和に分解すること、モデルでいえば多重緩和モデルである一般線形体を単一緩和モデルである標準線形体に分解することである。一般線形体のスペクトル分解は、一般線形体の応力-歪微分方程式を、調和振動する応力、歪に関して解析することにより得られるが^{11,12)}、本論では力学系の問題を、同等な電気回路系の問題に変換して解くことにより、スペクトル分解が容易にできることを示す。さらに、多重緩和のスペクトル分解の具体例を点欠陥緩和に求め、本論に沿って現代風に記述する。

2. 力学系と電気回路系の対応関係

慣性錘りと固体ワイヤから成る単純振り振子の自由振動は、慣性能力 I 、固体ワイヤの粘性率 η 、バネ定数 k とすると、振り変位を θ として運動方程式

$$I\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + k\theta = 0 \quad (2.1)$$

で表わせる(図1)。一方, コイル, 抵抗, コンデンサーを直列につないだ回路の方程式は, コイルのインダクタンスを L , 抵抗を R , コンデンサーのキャパシタンスを C , 電荷量を q とすると

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{2.2}$$

となる(図2)。方程式(2.1), (2.2)から運動系と回路系間の対応関係として

$$I \longleftrightarrow L, \quad \eta \longleftrightarrow R, \quad k \longleftrightarrow \frac{1}{C}, \quad \theta \longleftrightarrow q \tag{2.3}$$

を得る。また, 運動方程式の左辺はトルク T を意味し, 回路方程式(2.2)の左辺は電圧 V を意味するから

$$T \longleftrightarrow V \tag{2.4}$$

なる対応関係があることになる。応力-歪の力学系と振り振子の運動系との間には

$$\eta \longleftrightarrow \eta, \quad M = \frac{1}{J} \longleftrightarrow k, \quad \varepsilon \longleftrightarrow \theta, \quad \sigma \longleftrightarrow T \tag{2.5}$$

なる対応関係があるので, 応力-歪の力学系と回路系の間には

$$\eta \longleftrightarrow R, \quad M = \frac{1}{J} \longleftrightarrow \frac{1}{C}, \quad \varepsilon \longleftrightarrow q, \quad \sigma \longleftrightarrow V \tag{2.6}$$

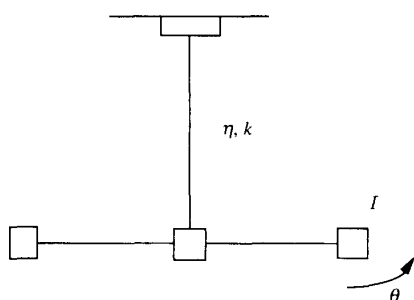
なる対応関係が成り立つ。また, 接続については, 力学系の直列, 並列はそれぞれ回路系の並列, 直列に対応するから,

$$\begin{aligned} \text{(力学系)} &\longleftrightarrow \text{(回路系)} \\ \text{直 列} &\longleftrightarrow \text{並 列} \\ \text{並 列} &\longleftrightarrow \text{直 列} \end{aligned} \tag{2.7}$$

である。

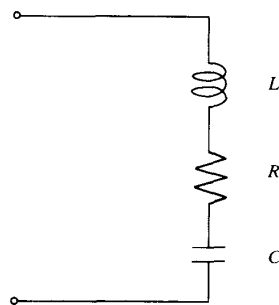
3. 内部摩擦の定義

周期的に振動する応力



$$I\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + k\theta = 0$$

図1 振り振子の運動方程式



$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

図2 コイル, 抵抗, コンデンサー直列回路方程式

$$\sigma = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

を固体に与える。ここに、 σ_0 は定数で応力の振幅であり、 ω は振動数、 t は時間、 i は虚数単位である。緩和現象を伴う擬弾性固体は、与応力に対して歪が位相 φ の遅れをもって追従するので、 ε_0 を歪の振幅とすると

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (3.2)$$

である。複素コンプライアンス J^* 、storageコンプライアンス J_1 、lossコンプライアンス J_2 を

$$J^* \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad (3.3), \quad J_1 \equiv \text{Re} J^* \quad (3.4), \quad J_2 \equiv -\text{Im} J^* \quad (3.5)$$

で定義し、

$$J_0 \equiv \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \quad (3.6)$$

とすれば

$$J^* = J_0 e^{-i\varphi} \quad (3.7), \quad J_1 = J_0 \cos \varphi \quad (3.8), \quad J_2 = J_0 \sin \varphi \quad (3.9)$$

となるから、 J^* 、 J_1 、 J_2 は時間に依存しない。

いま、積がエネルギー密度の次元をもつ物理量 $\{x, \zeta\}$ を共役変数、 x を部分ポテンシャル、 ζ を密度と呼ぶと、歪と応力の組 $\{\varepsilon, \sigma\}$ は、 $\varepsilon\sigma$ が単位体積当たりのエネルギーの次元をもち共役変数である。共役変数 $\{\varepsilon, \sigma\}$ の部分ポテンシャルと密度を入れ換えた共役変数 $\{\sigma, \varepsilon\}$ では、周期的振動応力の代わりに周期的振動歪

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3.10)$$

を基準に考えることになる。このとき、応力は歪に対して位相が φ だけ進んでおり、

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (3.11)$$

である。複素弾性率を M^* 、storage弾性率を M_1 、loss弾性率を M_2 とし、

$$M^* \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (3.12), \quad M_1 \equiv \text{Re} M^* \quad (3.13), \quad M_2 \equiv \text{Im} M^* \quad (3.14)$$

と定義すると

$$M_0 \equiv \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (3.15)$$

とにおいて

$$M^* = M_0 e^{i\varphi} \quad (3.16), \quad M_1 = M_0 \cos \varphi \quad (3.17), \quad M_2 = M_0 \sin \varphi \quad (3.18)$$

となるから、 M^* 、 M_1 、 M_2 は時間に依存しない。コンプライアンス J^* 、 J_1 、 J_2 、弾性率 M^* 、 M_1 、 M_2 は時間には依存しないが、振動数の関数となる¹¹⁾。

固体の内部摩擦とは、固体に周期的振動応力を与えると、周期初めに蓄積された最大

エネルギーに対する1周期に失われるエネルギーの割合を単位位相当なりに換算した物理量と定義する。いま、周期初めの最大弾性エネルギーを W とし、その周期に失うエネルギーを ΔW とすると、内部摩擦は Q^{-1} は

$$Q^{-1} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \tag{3.19}$$

と定義される。失われるエネルギーは熱として散逸するが、緩和モデルでいえばダッシュポットの粘性流動で消費されるエネルギーである。擬弾性では応力-歪曲線が楕円のヒステリシスループを描き(図3), その楕円の面積が1周期に失われるエネルギー ΔW である。すなわち

$$\Delta W = \oint \sigma d\varepsilon = \pi J_2 \sigma_0^2 \tag{3.20}$$

であり、弾性エネルギー W が

$$W = \frac{1}{2} J_2 \sigma_0^2 \tag{3.21}$$

であるから、式(3.19)より

$$Q^{-1} = \frac{J_2}{J_1} = \tan \varphi \tag{3.22}$$

を得る。内部摩擦を弾性率で表わせば、式(3.16)~(3.18)から

$$Q^{-1} = \frac{M_2}{M_1} = \tan \varphi \tag{3.23}$$

である。

4. 複素力学定数と電気回路定数の対応関係

一方、回路系では、電圧 $V = V_0 e^{i\omega t}$ に対して電流が位相 φ だけ遅れて追随すると、電流を I として

$$I = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)} \tag{4.1}$$

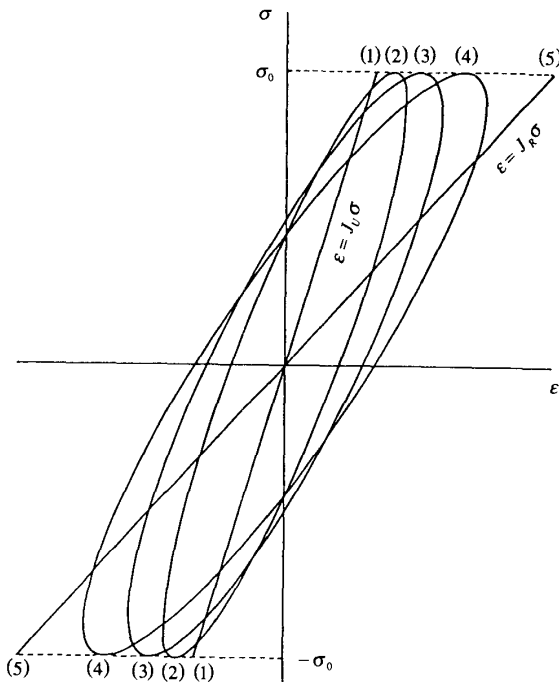
となる。アドミッタンスを Y , インピーダンスを Z とすると

$$Y \equiv \frac{I}{V} \tag{4.2}$$

$$Z \equiv \frac{V}{I} \tag{4.3}$$

と定義され、

$$Y = \frac{1}{Z} = G - iB = \frac{I_0}{V_0} e^{-i\varphi} \tag{4.4}$$



(1) $\omega\tau_\sigma = \infty$, (2) $\omega\tau_\sigma = 1$, (3) $\omega\tau = \omega\sqrt{\tau_\varepsilon\tau_\sigma} = 1$,
(4) $\omega\tau_\sigma = 1$, (5) $\omega\tau_\sigma = 0$

図3 標準線形体の応力-歪曲線図

$$Z = R + iX = \frac{V_0}{I} e^{i\varphi} \quad (4.5)$$

となる。ここに、 G はコンダクタンス、 B はサセプタンス、 X はリアクタンスであり、

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (4.6), \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (4.7)$$

となる。また、 X はコイルのインダクタンス L 、コンデンサーのキャパシタンス C を用いて、

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (4.8)$$

と書ける。本論では、応力-歪の関係を扱い、式(1.6)の運動方程式は取り込まないので質量の関与がないから、電気回路系でいえば $L = 0$ の場合を扱うことになり

$$X = -\frac{1}{\omega C} \quad (4.9)$$

である。

複素コンプライアンス J^* は式(3.3)で定義されるから、変換(2.6)より J^* は q/V に移る。

$$\frac{q}{V} = \frac{\frac{f}{i\omega}}{V} = \frac{1}{i\omega} \frac{f}{V} \quad (4.10)$$

であるから

$$\frac{q}{V} = \frac{1}{i\omega} Y = -\frac{B}{\omega} - i\frac{G}{\omega} \quad (4.11)$$

となるので

$$J_1 \longleftrightarrow -\frac{B}{\omega}, \quad J_2 \longleftrightarrow \frac{G}{\omega} \quad (4.12)$$

の対応を得る。一方、複素弾性率 M^* は $1/J^*$ であるから、 M^* に対応するのは回路系の V/q である。

$$\frac{V}{q} = i\omega Z = -\omega X + i\omega R \quad (4.13)$$

から

$$M_1 \longleftrightarrow -\omega X, \quad M_2 \longleftrightarrow \omega R \quad (4.14)$$

なる対応関係がある。

5. 擬弾性緩和モデルとその対応回路

Hooke の法則を満たすモデルを Hooke スプリングといい(図4), 応力-歪の関係(1.4)から対応する回路系の関係式は

$$V = \frac{q}{C}, \quad \text{or} \quad \dot{V} = \frac{\dot{f}}{C} \quad (5.1)$$

である。ただし、 $t = 0$ で $q = 0$, $V = 0$ とする。

つぎに、歪速度と応力の比例関係

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (5.2)$$

を導入する。比例定数は η は粘性率といい、式(5.2)で表せる固体の性質を Newton 粘性、そのモデルを Newton ダッシュポットと呼ぶ(図5)。式(5.2)に対応する回路の式は

$$V = RI = R\dot{q} = i\omega Rq \tag{5.3}$$

となる。Hooke スプリングと Newton ダッシュポットから、並列につないだ Voigt モデルと直列につないだ Maxwell モデルがあって(図6, 7), それぞれはクリープ, 応力緩和モデルとなる。Voigt モデルの対応回路の式は,

$$\frac{J_R}{\tau_\sigma} \sigma = \dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau_\sigma} \tag{5.4}$$

に変換(2.6)を施し

$$\frac{C_R}{\tau_V} V = \dot{q} + \frac{q}{\tau_V} \tag{5.5}$$

となる(図8)。Maxwell モデルの対応回路の式は,

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_\epsilon} = M_U \dot{\epsilon} \tag{5.6}$$

から

$$\dot{V} + \frac{V}{\tau_q} = \frac{\dot{q}}{C_U} \tag{5.7}$$

である(図9)。ところが、Voigt モデルでは実際の固体の非緩和弾性を、Maxwell モデルでは緩和弾性を表現できない。この問題を解決するモデルが標準線形体であり、Voigt モデ

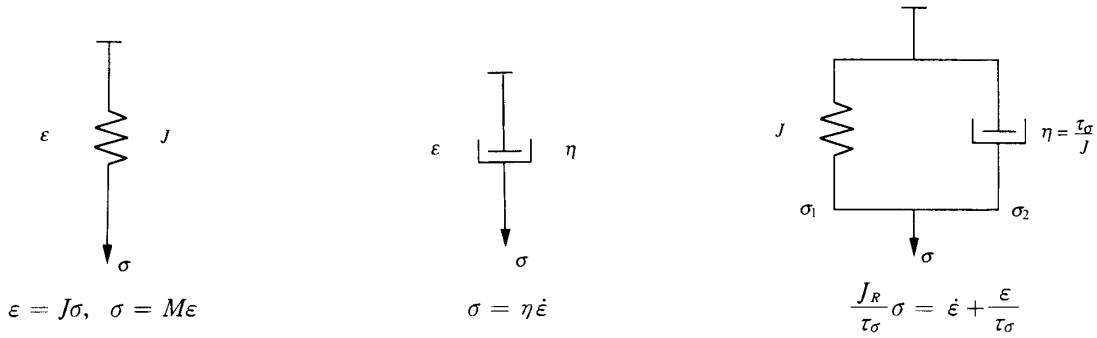


図4 Hooke スプリング

図5 Newton ダッシュポット

図6 Voigt モデル

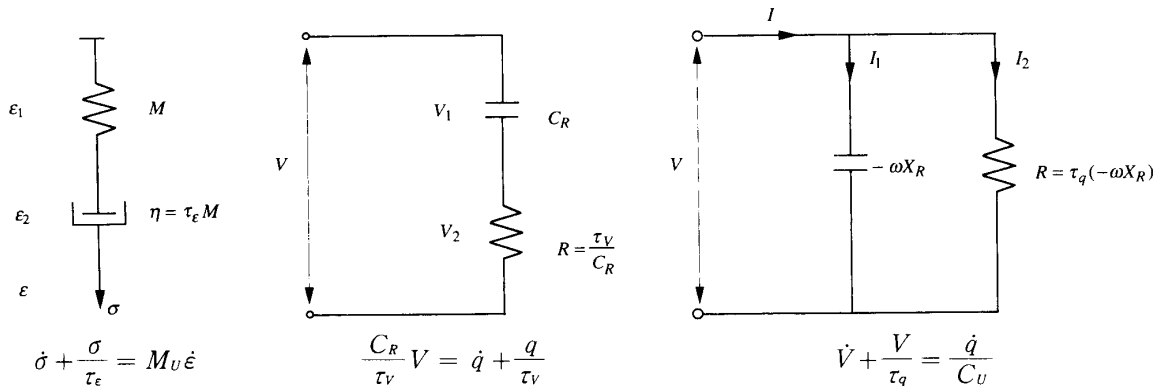


図7 Maxwell モデル

図8 Voigt モデル対応の回路

図9 Maxwell モデル対応の回路

ルを基本とする Voigt 型標準線形体と Maxwell モデルを基本とする Maxwell 型標準線形体がある(図10, 11)。Voigt 型, Maxwell 型標準線形体に対応した回路の式は, 応力-歪の関係式

$$J_U \dot{\sigma} + \frac{J_U + \delta J}{\tau_\sigma} \sigma = \dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau_\sigma} \tag{5.5}$$

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_\epsilon} = (M_R + \delta M) \dot{\epsilon} + \frac{M_R}{\tau_\epsilon} \epsilon \tag{5.6}$$

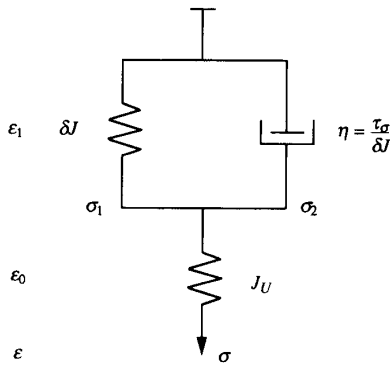
からそれぞれ

$$C_U \dot{V} + \frac{C_U + \delta C}{\tau_V} V = \dot{q} + \frac{q}{\tau_V} \tag{5.8}$$

$$\dot{V} + \frac{V}{\tau_q} = -\omega(X_R + \delta X) \dot{q} - \frac{\omega X_R}{\tau_q} q \tag{5.9}$$

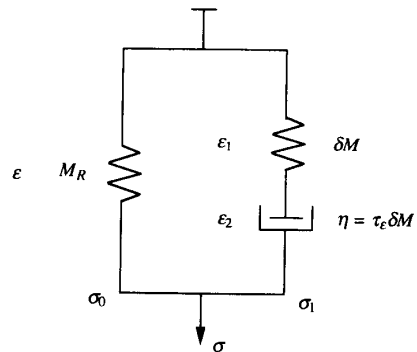
となる(図12, 13)。標準線形体は緩和時間 1 個を含む単一緩和の場合に相当するが, 多重緩和の一般線形体の場合, まず 2 重緩和では Voigt 型, Maxwell 型に対応の回路式が

$$\begin{aligned} C_U \dot{V} + \left(\frac{C_U + \delta C^{(1)}}{\tau_V^{(1)}} + \frac{C_U + \delta C^{(2)}}{\tau_V^{(2)}} \right) \dot{V} + \frac{C_U + \delta C^{(1)} + \delta C^{(2)}}{\tau_V^{(1)} \tau_V^{(2)}} V \\ = \dot{q} + \left(\frac{1}{\tau_V^{(1)}} + \frac{1}{\tau_V^{(2)}} \right) q + \frac{\epsilon}{\tau_V^{(1)} \tau_V^{(2)}} \end{aligned} \tag{5.10}$$



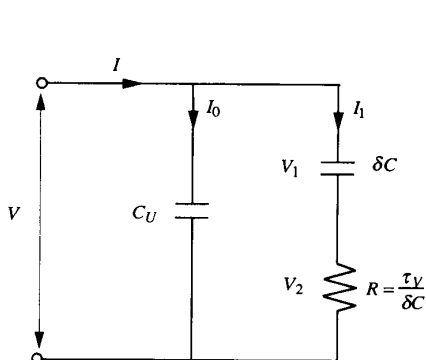
$$J_U \dot{\sigma} + \frac{J_U + \delta J}{\tau_\sigma} \sigma = \dot{\epsilon} + \frac{\epsilon}{\tau_\sigma}$$

図10 Voigt 型標準線形体



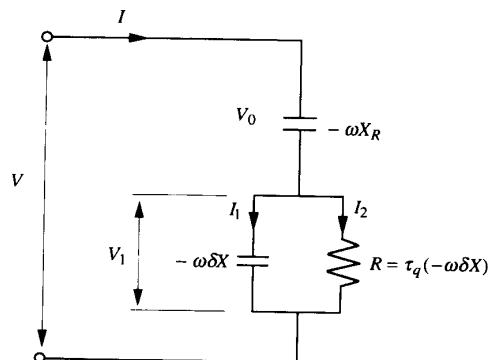
$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_\epsilon} = (M_R + \delta M) \dot{\epsilon} + \frac{M_R}{\tau_\epsilon} \epsilon$$

図11 Maxwell 型標準線形体



$$C_U \dot{V} + \frac{C_U + \delta C}{\tau_V} V = \dot{q} + \frac{q}{\tau_V}$$

図12 Voigt 型標準線形体対応の回路



$$\dot{V} + \frac{V}{\tau_q} = -\omega(X_R + \delta X) \dot{q} - \frac{\omega X_R}{\tau_q} q$$

図13 Maxwell 型標準線形体対応の回路

$$\begin{aligned} \dot{V} + \left(\frac{1}{\tau_q^{(1)}} + \frac{1}{\tau_q^{(2)}} \right) \dot{V} + \frac{1}{\tau_q^{(1)} \tau_q^{(2)}} V \\ = -\omega (X_R + \delta X^{(1)} + \delta X^{(2)}) \dot{q} - \omega \left(\frac{X_R + \delta X^{(2)}}{\tau_q^{(1)}} + \frac{X_R + \delta X^{(1)}}{\tau_q^{(2)}} \right) \dot{q} - \omega \frac{X_R}{\tau_q^{(1)} \tau_q^{(2)}} q \end{aligned} \quad (5.11)$$

である(図14, 15)。 n 重緩和の場合, Voigt型, Maxwell型に対応の回路式は

$$\sum_{\nu=0}^n \left(\sum_{(i_1, \dots, i_\nu) \in \Omega_n} \frac{C_U + \sum_{\mu=1}^{\nu} \delta C^{(i_\mu)}}{\prod_{\mu=1}^{\nu} \tau_V^{(i_\mu)}} \right) V^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=0}^n \left(\sum_{(i_1, \dots, i_\nu) \in \Omega_n} \frac{1}{\prod_{\mu=1}^{\nu} \tau_V^{(i_\mu)}} \right) q^{(n-\nu)} \quad (5.12)$$

$$\sum_{\nu=0}^n \left(\sum_{(i_1, \dots, i_\nu) \in \Omega_n} \frac{1}{\prod_{\mu=1}^{\nu} \tau_q^{(i_\mu)}} \right) V^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=0}^n \left(\sum_{(i_1, \dots, i_\nu, i_{\nu+1}, \dots, i_n) \in \Omega_n} -\omega \frac{X_R + \sum_{\mu=\nu+1}^n \delta X^{(i_\mu)}}{\prod_{\mu=1}^{\nu} \tau_V^{(i_\mu)}} \right) q^{(n-\nu)} \quad (5.13)$$

である(図16, 17)。ここに Ω_n は集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ で, $\sum_{(i_1, \dots, i_\nu) \in \Omega_n}$ は Ω_n から ν 個取り出すすべての組み合わせにわたる和を表わす。

6. 緩和時間

標準線形体に対応した回路系の例で緩和時間を論ずる。Voigt型標準線形体に対応する回路系(図8)に一定電圧 V_0 を与えると, Voigt ユニット対応のコンデンサー δC と抵抗 R の直列接続回路では抵抗 R があるから電圧を加えても瞬時にはコンデンサー δC に電荷がチャージされない。その後時間経過とともにコンデンサーにも徐々に電荷がチャージされ, 時間 t における回路全体のキャパシタンス $C(t)$ は

$$C(t) = C_U + \delta C (1 - e^{-t/\tau_V}) \quad (6.1)$$

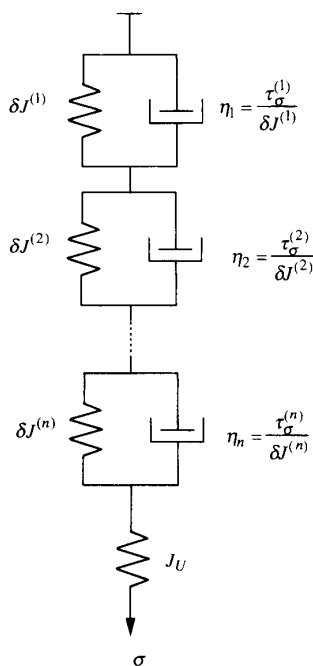


図14 Voigt型一般線形体

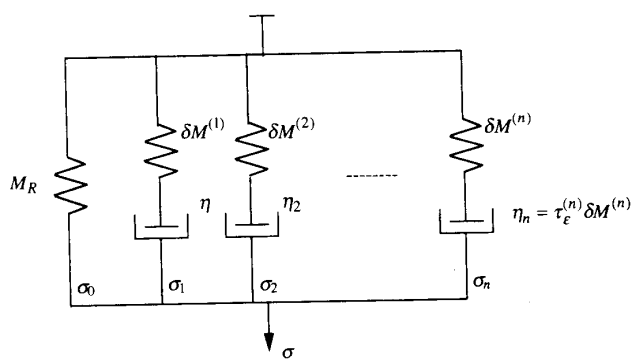


図15 Maxwell型一般線形体

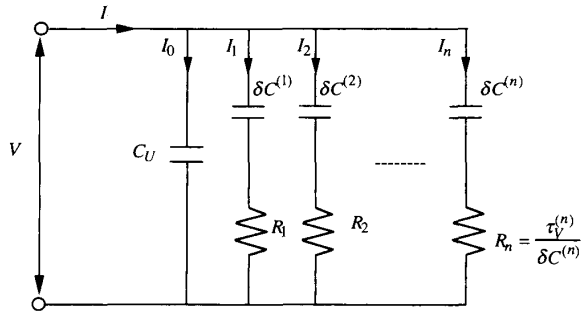


図16 Voigt 型一般線形体対応の回路

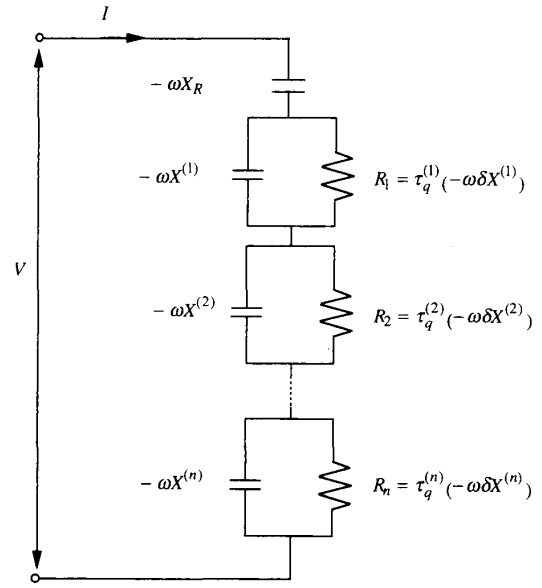


図17 Maxwell 型一般線形体対応の回路

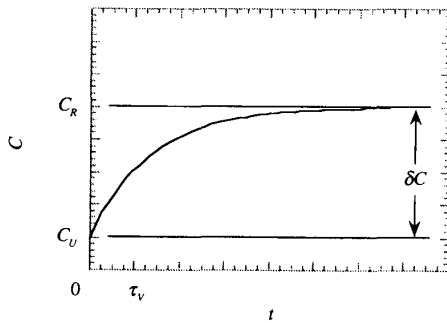


図18 定電圧下の電荷緩和

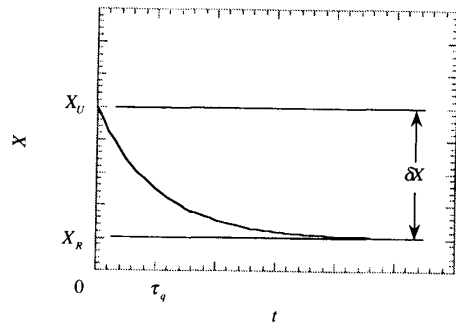


図19 定電荷下の電圧緩和

となる(図18)。同様にして、Maxwell 型標準線形体の対応回路のリアクタンスは、定電荷 q_0 を回路に与えるとき、時間 t のリアクタンスを $X(t)$ とすると

$$X(t) = X_R + \delta X e^{-t/\tau_q} \tag{6.2}$$

と表わせる(図19)。

7. 内部摩擦と回路の Q 値

力学系の内部摩擦に対応する回路系の物理量は電気回路の Q 値の逆数で Q インバースとここでは呼び、 Q_e^{-1} と書くことにする。式(3.22), (3.23) と対応(4.12), (4.14) から回路系の Q インバースは

$$Q_e^{-1} = \frac{G}{-B} = \frac{R}{-X} \tag{7.1}$$

となる。 n 重緩和の Voigt 型一般線形体に対応した回路(図16)のアドミッタンスは回路理論から容易に求まり、

$$Y = i\omega C_U + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{R_\nu + \left(\frac{1}{i\omega\delta C^{(\nu)}}\right)} = i\omega \left\{ C_U + \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta C^{(\nu)} - i\omega\tau_V^{(\nu)}\delta C^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_V^{(\nu)})^2} \right\} \quad (7.2)$$

である。式(4.12), (7.2)から

$$-\frac{B}{\omega} = C_U + \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta C^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_V^{(\nu)})^2} \quad (7.3)$$

$$\frac{G}{\omega} = \sum_{\nu=1}^n \delta C^{(\nu)} \frac{\omega\tau_V^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_V^{(\nu)})^2} \quad (7.4)$$

であり、回路の緩和強度は

$$\mathcal{A}_e^{(\nu)} \equiv \frac{\delta C^{(\nu)}}{C_U} \quad (7.5)$$

で定義され、 Q インバースは

$$Q_e^{-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}_e^{(\nu)} \frac{\omega\tau_V^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_V^{(\nu)})^2}}{1 + \sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}_e^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega\tau_V^{(\nu)})^2}} \quad (7.6)$$

と表わせる。式(7.3), (7.4)に変換(4.12)を施し力学系に戻ると、

$$J_1 = J_U + \sum_{\nu=1}^n \delta J^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2} \quad (7.7)$$

$$J_2 = \sum_{\nu=1}^n \delta J^{(\nu)} \frac{\omega\tau_\sigma^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2} \quad (7.8)$$

を得る。したがって、緩和強度 $\mathcal{A}^{(\nu)}$ を用いれば、Voigt 型一般線形体の内部摩擦の式

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \frac{\sum_{\nu=1}^n \delta J^{(\nu)} \frac{\omega\tau_\sigma^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2}}{J_U + \sum_{\nu=1}^n \delta J^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2}} = \frac{\sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}^{(\nu)} \frac{\omega\tau_\sigma^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2}}{1 + \sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2}} \\ &\approx \sum_{\nu=1}^n \mathcal{A}^{(\nu)} \frac{\omega\tau_\sigma^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_\sigma^{(\nu)})^2} \end{aligned} \quad (7.9)$$

が導ける。

Maxwell 型一般線形体の場合は、対応回路(4.4)のインピーダンス Z が回路理論から容易に求まり

$$Z = iX_R + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\frac{1}{i\delta X^{(\nu)}} + \frac{1}{R_\nu}} = i \left(X_R + \sum_{\nu=1}^n \frac{(\omega\tau_q^{(\nu)})^2 + i\omega\tau_q^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_q^{(\nu)})^2} \right) \quad (7.10)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{V}{q} &= i\omega Z = -\omega X + i\omega R \\ &= \left\{ -\omega X_R + \sum_{\nu=1}^n (-\omega\delta X^{(\nu)}) \frac{(\omega\tau_q^{(\nu)})^2}{1 + (\omega\tau_q^{(\nu)})^2} \right\} + i \sum_{\nu=1}^n (-\omega\delta X^{(\nu)}) \frac{\omega\tau_q^{(\nu)}}{1 + (\omega\tau_q^{(\nu)})^2} \end{aligned} \quad (7.11)$$

また

$$-\omega X = -\omega X_R + \sum_{\nu=1}^n (-\omega\delta X^{(\nu)}) \frac{(\omega\tau_q^{(\nu)})^2}{1 + (\omega\tau_q^{(\nu)})^2} \quad (7.12)$$

$$\omega R = \sum_{\nu=1}^n (-\omega \delta X^{(\nu)}) \frac{\omega \tau_q^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_q^{(\nu)})^2} \quad (7.13)$$

であり、式(7.5)は式(4.9)から

$$\Delta_e^{(\nu)} = \frac{\delta X^{(\nu)}}{X_R} \quad (7.14)$$

と書け、式(7.1)より

$$Q_e^{-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^n \Delta_e^{(\nu)} \frac{\omega \tau_q^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_q^{(\nu)})^2}}{1 + \sum_{\nu=1}^n \Delta_e^{(\nu)} \frac{(\omega \tau_q^{(\nu)})^2}{1 + (\omega \tau_q^{(\nu)})^2}} \quad (7.15)$$

を得る。

一方、上記の回路系に対する関係(7.12), (7.13)を変換(4.14)から力学系に戻せば、storage 弾性率 M_2 は

$$M_1 = M_R + \sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{(\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2} = M_U - \sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2} \quad (7.16)$$

$$M_2 = \sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2} \quad (7.17)$$

となる。緩和強度 $\Delta^{(\nu)}$ を用いて、Maxwell 型一般線形体の内部摩擦の式

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \frac{\sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2}}{M_U + \sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2}} = \frac{\sum_{\nu=1}^n \Delta^{(\nu)} \frac{\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2}}{1 + \sum_{\nu=1}^n \Delta^{(\nu)} \frac{1}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2}} \\ &\approx \sum_{\nu=1}^n \Delta^{(\nu)} \frac{\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

を得る。

本節では、力学系の関係を同等な電気回路系に移し、調和振動する電圧もしくは電流下で回路のアドミッタンス、インピーダンスを求め、力学系へ戻すことにより、多重緩和のスペクトル分解が可能となった。回路のアドミッタンス、インピーダンスの式(7.2), (7.10)を求めたのと同様にして、多重緩和のモデルのコンプライアンス、弾性率の式

$$J^* = J_U + \sum_{\nu=1}^n \delta J^{(\nu)} \frac{1 - i\omega \tau_\sigma^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\sigma^{(\nu)})^2} \quad (7.19)$$

$$M^* = M_R + \sum_{\nu=1}^n \delta M^{(\nu)} \frac{(\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2 + i\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^{(\nu)})^2} \quad (7.20)$$

を、回路系への変換という迂回をさらに早い時点で力学系に戻して求めることもできる。

8. 多重点欠陥緩和の分解

多重緩和の分解の具体例を示す。結晶固体における0次元欠陥を点欠陥といい、空孔、侵入型不純物原子、置換型不純物原子がある。1次元の欠陥には転位、2次元の欠陥には積層欠陥、粒界、双晶境界、異相境界、3次元の欠陥にはボイドがある。まず、1種類の点欠

陥緩和に限定する。点欠陥の近傍で、結晶の対称性により移る方位を同等な方位ということとし、いま同等な方位が n_t 個存在するとする。同等な結晶方位の任意の1つを方位 i とし、方位 i 上にある点欠陥の濃度を C_i 、点欠陥全体の濃度を C_0 とすると、 C_0 は一定で

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n_t} C_i \quad (8.1)$$

である。ただし濃度は単位体積当たりの濃度とする。

共役変数の密度に方位 i の点欠陥濃度 C_i 、部分ポテンシャルには化学ポテンシャル ΔG_i をとり、緩和現象は共役変数の歪一応力 $\{\varepsilon, \sigma\}$ を通じて観察されるものとする。現平衡状態の応力を0として、微小応力 σ が結晶固体に与えられたとする。応力0では、点欠陥回りの同等ないずれの方位も等しいエネルギーレベルにある。応力をかけると、ある方位 i_0 のエネルギーが ΔG_{i_0} だけ変化し、 i_0 以外の方位の点欠陥が方位 i_0 にシフトする応力誘起規則化が起こるものとする。時間経過とともに応力誘起による歪は緩和して新たな平衡状態に到達する。新平衡状態の、擬弾性歪を $\bar{\varepsilon}_a$ 、方位 i の濃度を \bar{C}_i とする。初期平衡状態の濃度は C_0/n_t であるから、応力 σ を加えることによる濃度変化 ΔC_i は

$$\Delta C_i = \bar{C}_i - \frac{C_0}{n_t} \quad (8.2)$$

である。点欠陥濃度は Boltzmann 統計に従うとし、温度を固定して T_0 とすると

$$\frac{\bar{C}_i}{C_0} = \frac{\exp\left(-\frac{\Delta G_i}{kT_0}\right)}{\sum_{j=1}^{n_t} \exp\left(-\frac{\Delta G_j}{kT_0}\right)} \quad (8.3)$$

なる関係を得る。微小応力 σ に対して、 ΔG_j ($j = 1, 2, \dots, n_t$) は小さく

$$\frac{\Delta G_j}{kT_0} \ll 1 \quad (8.4)$$

である。式(8.3), (8.4)より

$$\begin{aligned} \bar{C}_i &= \frac{C_0 \exp\left(-\frac{\Delta G_i}{kT_0}\right)}{\sum_{j=1}^{n_t} \exp\left(-\frac{\Delta G_j}{kT_0}\right)} \cong \frac{C_0}{n_t} \left(1 - \frac{\Delta G_i}{kT_0}\right) \left(1 + \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \frac{\Delta G_j}{kT_0}\right) \\ &\cong \frac{C_0}{n_t} \left(1 - \frac{\Delta G_i}{kT_0} + \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \frac{\Delta G_j}{kT_0}\right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

を得る。式(8.2), (8.5)から

$$\Delta C_i \cong \frac{C_0}{n_t} \left(-\frac{\Delta G_i}{kT_0} + \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \frac{\Delta G_j}{kT_0}\right) \quad (8.6)$$

また、

$$\Delta G_i = -\lambda_i \sigma \quad (8.7)$$

であるので⁷⁾,

$$\Delta C_i \cong \frac{\sigma C_0}{n_t k T_0} \left(\lambda_i - \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \lambda_j \right) \quad (8.8)$$

となる。したがって

$$\Delta \vec{C} \equiv (\Delta C_i) \cong \frac{\sigma C_0}{n_t k T_0} \left\{ \vec{\lambda} - \left(\frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \lambda_j \right) \vec{1}_{n_t} \right\} \quad (8.9)$$

である。ここに

$$\vec{\lambda} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_t} \end{pmatrix}, \quad \vec{1}_{n_t} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n_t} \quad (8.10)$$

擬弾性歪 $\bar{\varepsilon}_a$ は

$$\bar{\varepsilon}_a = \vec{\lambda} \cdot \Delta \vec{C} \cong \frac{\sigma C_0}{n_t k T_0} \left\{ \|\vec{\lambda}\|^2 - \frac{(\vec{\lambda} \cdot \vec{1}_{n_t})^2}{n_t} \right\} = \frac{\sigma C_0}{n_t k T_0} (\|\vec{\lambda}\|^2 - n_t \bar{\lambda}^2) \quad (8.11)$$

となる⁷⁾。ここに

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{1}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} \lambda_j \quad (8.12)$$

である。また

$$\bar{\varepsilon}_a \cong \frac{\sigma C_0}{n_t k T_0} \|\vec{\lambda} - \bar{\lambda} \vec{1}_{n_t}\|^2 \quad (8.13)$$

と書ける。ゆえに、

$$\delta J \cong \frac{C_0}{n_t k T_0} \|\vec{\lambda} - \bar{\lambda} \vec{1}_{n_t}\|^2 \quad (8.14)$$

となり、緩和強度は

$$\Delta \cong \frac{C_0}{n_t k T_0 J_U} \|\vec{\lambda} - \bar{\lambda} \vec{1}_{n_t}\|^2 \quad (8.15)$$

で、濃度 C_0 に比例する。

いま、異なる2種以上の k 種の点欠陥が緩和現象に関わり、第 i 種の点欠陥には $n_t^{(i)}$ 個の同等な方位があるとする。それぞれの点欠陥濃度を $C^{(j)}$ 、緩和強度を $\Delta^{(j)}$ 、緩和時間 $\tau^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, k$) とすると

$$Q^{-1} \cong \sum_{j=1}^k \Delta^{(j)} \frac{\omega \tau^{(j)}}{1 + (\omega \tau^{(j)})^2}, \quad \Delta^{(j)} \cong \frac{C_0^{(j)}}{n_t^{(j)} k T_0 J_U} \|\vec{\lambda}^{(j)} - \bar{\lambda} \vec{1}_{n_t^{(j)}}\|^2 \quad (8.16)$$

で表わせ、多重緩和のスペクトル分解が可能となる。

フェライト(体心立方晶の鉄)中固溶C, N量は侵入型不純物で、鉄中の一種の点欠陥である。鉄中に固溶するC, N量は微量のため緩和に関しては両者の相互作用は無視できる。C, Nの緩和のための活性化エネルギーは異なるので緩和時間の違う2つの緩和現象が重畳する2重緩和となる。C, Nによる点欠陥緩和はそれぞれが単独に鉄中に固溶するときの緩和に分解できる。

参考文献

- 1) R. Hooke : De potentia restitutiva, (London, 1678).
- 2) I. S. Sokolnikoff : Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, (1956).
- 3) W. Weber : Über die Elastizität der Seidenfaden, Poggendorffs Ann., XXXV 247 (1834).

- 4) C. Zener : Elasticity and Anelasticity of Metals, The University of Chicago Press, Chicago, (1948).
- 5) A.S. Nowick and B. S. Berry : Anelastic Relaxation in Crystalline Solids, Academic Press, New York, (1972).
- 6) R. de Batist : Internal Friction of Structural Defects in Crystalline Solids, North-Holland, Amsterdam, (1972).
- 7) 岩崎義光 : 第24回数値解析シンポジウム予稿集, 伊豆熱川, 31-35 (1995.6).
- 8) 岩崎義光 : 阿波ワークショップ'95「第3回先端技術における数理モデル解析」, 徳島大学 (1995.8).
- 9) 岩崎義光 : 日本応用数学会平成7年度会予稿集, 188-189 (1995.9).
- 10) 岩崎義光 : 日本応用数学会平成7年度会予稿集, 190-191 (1995.9).
- 11) Y. Iwasaki and K. Fujimoto : Resonant system of a torsion pendulum with anelastic solids of discrete relaxation spectra, J. Phys. D: Appl. Phys., **13**, 823-834 (1980).
- 12) Y. Iwasaki and K. Fujimoto : Internal friction in solids measured by torsion pendulums, J. Phys. D: Appl. Phys., **15**, 1349-1359 (1982).

Application of the Theory of Electric Circuit to the Analysis of Anelastic Relaxation

Yoshimitsu IWASAKI

Department of Applied Mathematics,

Faculty of Science,

Okayama University of Science,

Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1995)

Since Zener's work on the anelasticity in metals (1948), the anelastic relaxation has been dealt with in various field of materials such as metals, semi-conductors, ceramics and composite materials. The anelastic relaxation in the solid generally consists of several simple relaxations superposed. Decomposition of the anelastic multi-relaxation into simple relaxations is prerequisite to precise analysis of the anelastic phenomena. There are considered two ways for such decomposition; the one is based on the stress-strain equation of the general linear solid, and the other is application of the theory of electric circuit. This paper describes the latter treatment to show that the decomposition of multi-relaxation into simple ones is readily carried out.