環の単純拡大に現れる整拡大となる部分環について

田枝　覚・吉田憲一*

岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻研究生

*岡山理科大学理学部応用数学科

（1995年9月30日　受理）

序

環（この論文では環は可換環で単位元を有するものとする）の単純拡大に関する研究において，anti-integral と呼ばれる元を附加した拡大について詳しく調べられている[3,4]。

この論文では anti-integral な元 α を附加した環 $\boldsymbol{R}[\alpha]$ の部分環 $\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ について考察してみよう[1]。$\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ は $\boldsymbol{R}$ 上整拡大な $\boldsymbol{R}[\alpha]$ の部分環である。$\boldsymbol{R}$ をネーター整域，$\boldsymbol{K}$ を $\boldsymbol{R}$ の商体，α は $\boldsymbol{K}$ 上代数的な元で拡大次数を d とする。このとき，α の最小多項式でモニックなものは唯一つ定まる。それを

$$\varphi_\alpha(X) = X^d + \eta_1 X^{d-1} + \cdots + \eta_d \qquad (\eta_i \in \boldsymbol{K})$$

とする。

$$I_{\eta_i} = \boldsymbol{R} :_{R} \eta_i = \{a \in \boldsymbol{R} \mid a\eta_i \in \boldsymbol{R}\}$$

で η_i の分母イデアルをあらわすとき，

$$I_{[\alpha]} = \bigcap_{i=1}^{d} I_{\eta_i}$$

を拡張された元 α の分母イデアルと呼ぶ。$d=1$，すなわち $\alpha \in \boldsymbol{K}$ のときは $I_{[\alpha]} = I_\alpha$ である。

$\boldsymbol{R}[X]$ を $\boldsymbol{R}$ 上に一変数 X を附加した多項式環

$$\pi : \boldsymbol{R}[X] \longrightarrow \boldsymbol{R}[\alpha]$$

を自然な環の準同型とするとき

$$\mathrm{Ker}\,\pi \supseteq I_{[\alpha]}\varphi_\alpha(X)\boldsymbol{R}[X]$$

である。この包含関係の等号が成り立つとき，元 α は *anti-integral* と呼ばれる。元 α が $\boldsymbol{K}$ の元で integral かつ anti-integral であることと α は $\boldsymbol{R}$ の元であることとは同値であり，拡大次数 d のときは，α が integral かつ anti-integral であることと $\boldsymbol{R}[\alpha]$ が階数 d

の自由 $\boldsymbol{R}$-加群であることとは同値であることが知られている。

Mirbagheri-Ratliff, Jr によって α が $\boldsymbol{K}$ の元であるとき，α が anti-integral であることと $\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]=\boldsymbol{R}$ であることは同値であることが示された[2)]。

$\boldsymbol{R}[\alpha]$ の部分環 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ は $\boldsymbol{R}$ 上の整拡大であるが，この部分環 $\boldsymbol{B}$ についても詳しい研究がなされている。

$J_{[\alpha]}=I_{[\alpha]}(1,\eta_1,\cdots,\eta_d)$ と定める。Grade $J_{[\alpha]}>1$，すなわち p を $\boldsymbol{R}$ の素イデアルで depth $\boldsymbol{R}_p=1$ なら $J_{[\alpha]}\not\subset p$ となるとき，元 α は *super-primitive* と呼ばれ，super-primitive な元は anti-integral であることが知られている[3)]。

さて，まずはじめに次の結果からはじめよう。

命　題 1．

Noetherian domain $\boldsymbol{R}\subset$ quotient field $\boldsymbol{K}$，α: $\boldsymbol{R}$ 上 anti-integral element of degree d，そして $\boldsymbol{R}$ の元 a について，$a\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上 anti-integral とする。

このとき $\boldsymbol{R}[a\alpha]\cap\boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}]\subseteq\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]\Longleftrightarrow aI_{[a\alpha]}\subseteq I_{[\alpha]}$.

証　明

$\zeta_i=\alpha^i+\eta_1\alpha^{i-1}+\cdots+\eta_i$ とおくとき $\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]=\boldsymbol{R}+I_{[\alpha]}\zeta_1+\cdots+I_{[\alpha]}\zeta_{d-1}$ である事が知られている[1)]。従って，

$$\boldsymbol{R}[a\alpha]\cap\boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}]=\boldsymbol{R}+I_{[a\alpha]}a\zeta_1+\cdots+I_{[a\alpha]}a^{d-1}\zeta_{d-1}$$

故，$\boldsymbol{R}[a\alpha]\cap\boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}]\subseteq\boldsymbol{R}[\alpha]\cap\boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]\Longleftrightarrow I_{[a\alpha]}a^i\zeta_i\subseteq I_{[\alpha]}\zeta_i$ がすべての i について成り立つ。又 $I_{[a\alpha]}a^{i+1}\subseteq I_{[a\alpha]}a^i$ 故，これは $I_{[a\alpha]}a\subseteq I_{[\alpha]}$ と同値であることがわかる。

さてここで分母イデアル $I_{[a\alpha]}$ について調べてみよう。

$$\alpha^d+\eta_1\alpha^{d-1}+\cdots+\eta_d=0$$

より

$$(a\alpha)^d+(a\eta_1)(a\alpha)^{d-1}+\cdots+a^d\eta_d=0,$$

これは $a\alpha$ の $\boldsymbol{K}$ 上の最小次数のモニック多項式であるから，

$$I_{[a\alpha]}=I_{\eta_1}\cap I_{a^2\eta_2}\cap\cdots\cap I_{a^d\eta_d}$$

を得る。よって，$I_{a^i\eta_i}=I_{\eta_i}:a^i\supseteq I_{\eta_i}$ である。

今，$\boldsymbol{R}$ の元 a が各 I_{η_i} の素因子に入らないとする。このとき，$I_{a^i\eta_i}=I_{\eta_i}$ であるから，$I_{[a\alpha]}=I_{[\alpha]}$．従って，$aI_{[\alpha]}\subseteq I_{[\alpha]}$ が成り立つ。そこで次の命題が得られる。

命　題2.

Noetherian domain $\boldsymbol{R} \subset$ quotient field $\boldsymbol{K}$, α: $\boldsymbol{R}$ 上 anti-integral element of degree d, a を $\boldsymbol{R}$ の元で, $a\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上 anti-integral, かつ a は $\boldsymbol{R}/I_{\eta_i}$ の非零因子となっていれば,

$$\boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}] \subseteq \boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$$

証　明

$$\varphi_{a\alpha}(X) = (a\alpha)^d + a\eta_1(a\alpha)^{d-1} + \cdots + a^d\eta_d$$

故, $I_{[a\alpha]} = \bigcap I_{a^i\eta_i}$. a は $\boldsymbol{R}/I_{\eta_i}$ の非零因子なので $I_{a^i\eta_i} = I_{\eta_i} : a^i = I_{\eta_i}$. よって, $I_{[a\alpha]} = I_{[\alpha]}$ を得る。そこで $aI_{[a\alpha]} = aI_{[\alpha]} \subseteq I_{[\alpha]}$. よって先の命題より我々の結論を得る。

定　理3.

Noetherian domain $\boldsymbol{R} \subset$ quotient field $\boldsymbol{K}$, α: $\boldsymbol{R}$ 上 super-primitive element of degree d, a を $\boldsymbol{R}$ の元で, a は $\boldsymbol{R}/I_{[\alpha]}$ の非零因子であれば, この時,

$$\boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}] \subseteq \boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$$

である。

証　明

まず $I_{[a\alpha]} = I_{[\alpha]}$ であることを示す。

$$I_{[a\alpha]} = \bigcap I_{a^i\eta_i} = \bigcap(I_{\eta_i} : a^i) \subseteq \bigcap(I_{\eta_i} : a^d) = (\bigcap I_{\eta_i}) : a^d = I_{[\alpha]} : a^d,$$

よって a は $\boldsymbol{R}/I_{[\alpha]}$ の非零因子なので $I_{[a\alpha]} = I_{[\alpha]}$ である。

p を $\boldsymbol{R}$ の素イデアルで $I_{[\alpha]}$ を含むものとすれば, $I_{[\alpha]}$ は divisorial ideal なので depth $\boldsymbol{R}_p = 1$. α は super-primitive な元なので $J_{[\alpha]} \not\subset p$. よって $(I_{[\alpha]})_p$ は principal ideal なので p は $I_{[\alpha]}$ の素因子。よって仮定から $a \notin p$. 今, $a^i(I_{[\alpha]}\eta_i) \subset p$ とすれば $(I_{[\alpha]})_p a \in p$ となり, これは $J_{[\alpha]} \not\subset p$ に反するので, ある自然数 i で $a^i(I_{[\alpha]}\eta_i) \not\subset p$, よって

$$J_{[a\alpha]} = I_{[a\alpha]}(1, a\eta_1, \cdots, a^d\eta_d) = I_{[\alpha]}(1, a\eta_1, \cdots, a^d\eta_d) \not\subset p.$$

p を $\boldsymbol{R}$ の素イデアルで depth $\boldsymbol{R}_p = 1$ で $J_{[\alpha]} \not\subset p$ とすれば, $I_{[\alpha]} = I_{[a\alpha]} \subseteq J_{[a\alpha]}$ 故 $J_{[a\alpha]} \not\subset p$. 従って $a\alpha$ は super-primitive element なので $a\alpha$ は又 anti-integral。よって命題2より我々の結論を得る。従って $aI_{[a\alpha]} = aI_{[\alpha]} \subseteq I_{[\alpha]}$ 故, 先の命題より我々の結論を得る。

次に $\boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}] = \boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}]$ となるための条件を求めてみよう。

補　題4.

I を $\boldsymbol{R}$ の零イデアルでないものとする。a を $\boldsymbol{R}$ の元で $aI = I$ とすれば a は $\boldsymbol{R}$ の可逆元。

証　明

$a\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{R}$ とすれば $a\boldsymbol{R}$ を含む $\boldsymbol{R}$ の素イデアル p がある。p で局所化すれば $I_p = aI_p$。

証　明　　$aI_p = \boldsymbol{R}_p$，これは $a \in p$ に反する。$I \subset p$ のとき $aI_p = I_p$，Nakayama's lemma から $I_p = (0)$. $\boldsymbol{R}$ は integral domain で考えているので $I = (0)$ となり，$I \neq (0)$ に反するので a は $\boldsymbol{R}$ の可逆元。

定　理5.

Noetherian domain $\boldsymbol{R} \subset$ quotient field $\boldsymbol{K}$，$\alpha: \boldsymbol{R}$ 上 anti-integral element of degree d，ここで $d \geq 3$ とする。$\boldsymbol{R}$ の元 a に対して，$a\alpha$ は $\boldsymbol{R}$ 上 anti-integral とする。$\boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}] = \boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}]$ ならば a は $\boldsymbol{R}$ の可逆元。

証　明

$$\boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}] = \boldsymbol{R} + I_{[\alpha]}\zeta_1 + \cdots + I_{[\alpha]}\zeta_{d-1}$$
$$\boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}] = \boldsymbol{R} + I_{[a\alpha]}(a\zeta_1) + \cdots + I_{[a\alpha]}(a^{d-1}\zeta_{d-1})$$

これらはすべて直和分解でもある。従って $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}[\alpha] = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\eta_1 + \cdots + \boldsymbol{K}\eta_{d-1}$ より $\boldsymbol{K}(a^i\eta_i) = \boldsymbol{K}\eta_i$ であるから，$I_{[\alpha]}\eta_i = I_{[a\alpha]}(a^i\eta_i)$　$(1 \leq i \leq d-1)$。だから $I_{[\alpha]} = a^i I_{[a\alpha]}$ となる。仮定より $d \geq 3$ なので，$I_{[\alpha]} = aI_{[a\alpha]} = a^2 I_{[a\alpha]}$ だから $I_{[\alpha]} = aI_{[a\alpha]}$. 従って，$a$ は $\boldsymbol{R}$ の可逆元である。

これによって $\boldsymbol{R}[a\alpha] \cap \boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}] = \boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ であれば $\boldsymbol{R}[a\alpha] \doteq \boldsymbol{R}[\alpha]$ かつ $\boldsymbol{R}[(a\alpha)^{-1}] = \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ となる事がわかる。

参考文献

1) M. Kanemitu and K. Yoshida, Some properties of extensions $\boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ over Noetherian domains $\boldsymbol{R}$, to appeare in Communications in Algebra.

2) A. Mirbagheri and L.J. Ratliff, Jr., On the intersection of two overrings, Houston J. Math., **8** (1982) 525-535.

3) S. Oda and K. Yoshida, Anti-integral extensions of Noetherian domains, Kobe J. Math., **5** (1988) 43-56.

4) S. Oda, J. Sato and K. Yosida, High degree anti-integral extensions of Noetherian domains, Osaka J. Math., **30** (1993) 119-135.

A subring which is contained in a simple ring extension and integral over the ring R.

Satoru TAEDA, *Ken-ich YOSHIDA
Graduate School of Science,
Okayama University of Science
**Department of Applied Mathematics,*
Faculty of Science
Okayama University of Science
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan
(Received September 30, 1995)

For the study of a simple ring extension A $= \boldsymbol{R}[\alpha]$ over a commutative ring $\boldsymbol{R}$, the subring $\boldsymbol{R}[\alpha] \cap \boldsymbol{R}[\alpha^{-1}]$ is important. So, in this paper, we study the subring which is integral over $\boldsymbol{R}$.