非正規母集団からの$\sqrt{b_1}$の分布の高次キュムラント

福原　吉彦・中川　重和*・仁木　直人**・一村　稔*

岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻

*岡山理科大学理学部応用数学科

**東京理科大学工学部経営工学科

1　はじめに

対称分布からの標本に対して，平均値まわりの奇数次標本モーメントはすべて0である。したがって，奇数次モーメントの中でも標本3次モーメントは分布の非対称性，すなわち歪みの尺度として考えられる。とくに Pearson によって提案された歪度 $\sqrt{b_1}$ は，しばしば正規分布に近い分布の，正規分布からのズレを表すのに用いられている。

母集団 F からの n 個の無作為な標本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が与えられたとき，歪度 $\sqrt{b_1}$ は

$$\sqrt{b_1} = m_3/m_2^{\frac{3}{2}} \tag{1}$$

で定義される。ここで，m_r は r 次の標本モーメント

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^r, \quad m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2}$$

である。明らかに m_r は与えられた標本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称式であり，一般に対称統計量と呼ばれているクラスに属する。

Pearson[2] によって2次および4次のモーメントが導出されたのが1930年であり，それ以来 $\sqrt{b_1}$ の分布に関する研究がなされている（例えば Williams[3]）。計算機が発達しつつある1970年代には，D'agostino & Pearson[4] はモンテカルロ・シミュレーションによる近似モーメントの導出を行なっている。いずれの場合をも含め今まで行われてきた $\sqrt{b_1}$ の分布に関する一連の研究が，母集団 F に正規性を仮定していることは見逃せない。

現在,「頑健でかつ広範に適用できるモデル構築の観点から母集団 F に正規性を仮定するのはかならずしも最良ではない」との意見も多い。本論文では，この立場から，$\sqrt{b_1}$ の分布導出に全面的な見直しを与える。非正規母集団の場合も統一的に議論できるよう，母集団 F は必要次数までのキュムラントの存在のみを仮定する。$\sqrt{b_1}$ の分布導出もそうであるが，一般に対称統計量呼ばれているクラスの分布導出におけるアプローチとして，Fisher の k-統計量の利用と筆者ら（中川・仁木）の提唱した対称式算法がよく知られている[1]。ここでは，人間の高度なパターン処理能力に依存した Fisher の k-統計量の利用よりむし

ろ計算機による数式処理に適している後者を採用する。実際，対称式計算法[1]は汎用数式処理システム REDUCE 上にインプリメントされている。

セクション 2 では歪度 $\sqrt{b_1}$ の分布の 4 次までの近似キュムラントを示す。セクション 3 では母集団 F に正規分布，t-分布，ガンマ分布を仮定した場合の $\sqrt{b_1}$ の近似キュムラントを求め，さらに分布関数の近似式である Edgeworth 展開とパーセント点の近似式である Cornish-Fisher 逆展開を各場合で導く。最後に，数値的検討を行なう。

2　近似キュムラント

今後特に断らない限り，母集団 F は12次までのキュムラントを持つものと仮定し，それらを記号 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_{12}$ で表す。

2．1　近似キュムラントの導出

$\sqrt{b_1}$ のモーメントを計算するために，デルタ法を用いる。まず，補助変数

$$U=\frac{\sqrt{n}(m_2-\kappa_2)}{\kappa_2},\quad W=\sqrt{n}(m_3-\kappa_3) \tag{3}$$

を導入する。次に，$\sqrt{b_1}$ を $1/\sqrt{n}$ に関してべき級数展開を行なう；

$$\begin{aligned}\sqrt{b_1}&=\left(\kappa_3+\frac{W}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{U}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{3}{2}}\kappa_2^{-\frac{3}{2}} \\ &=\frac{1}{\kappa_2^{\frac{3}{2}}}\left\{\kappa_3+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(W-\frac{3}{2}\kappa_3 U\right)+\frac{1}{n}\left(-\frac{3}{2}WU+\frac{15}{8}\kappa_3 U^2\right)\right. \\ &\quad\left.+\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{15}{8}WU^2-\frac{35}{16}\kappa_3 U^3\right)\right\}+O(1/n^2).\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，$U\sim O(1)$，$W\sim O(1)$ に注意する。なぜなら $n\to\infty$ のとき，U と W はともに平均 0 で n に無関係な定数を分散にもつ正規分布に従うからである。

この展開式(4)において項別に期待値を取ることにより，$\sqrt{b_1}$ の 1 次モーメントが計算できる。r $(r=2, 3, 4)$ 次モーメントに関しても，(4)式の r 乗において項別に期待値を取ればよい。ここに出現する期待値の計算

$$E[W^j U^k]\quad (j\geq 0,\quad k\geq 0,\quad j+k\leq 6) \tag{5}$$

において対称式計算法[1]を利用している。さらにモーメントとキュムラントの関係から近似キュムラントを導くことができる。

2．2　主要結果

以上により，標準化された確率変量

$$\sqrt{B_1} = \sqrt{n}\,(\sqrt{b_1} - \sqrt{\beta_1}), \quad (\sqrt{\beta_1} = \kappa_3/\kappa_2^{\frac{3}{2}}) \tag{6}$$

の近似キュムラント $\lambda_j\ (1 \le j \le 4)$ は次のようになる：

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{-27/4\sqrt{\beta_1} + \kappa_2^{-2}(-3/2\kappa_2^{-1/2}\kappa_5 + 15/8\sqrt{\beta_1}\kappa_4)\right\}/\gamma + O\left(1/n\sqrt{n}\right), \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = {} & 1 + \frac{1}{n}\Big\{-45/2\beta_1^2 - 441/8\beta_1 - 36 + \kappa_2^{-2}\kappa_4(297/8\beta_1 - 198) \\ & +\kappa_2^{-3}(63/2\sqrt{\beta_1}\sqrt{\kappa_2}\kappa_5 - 45/8\kappa_6\beta_1 - 54\kappa_6) \\ & +\kappa_2^{-4}(33/4\sqrt{\beta_1}\sqrt{\kappa_2}\kappa_7 - 3\kappa_8 + 855/32\kappa_4^2\beta_1 - 27\kappa_4^2) \\ & +\kappa_2^{-5}(-165/4\sqrt{\beta_1}\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\kappa_4 + 6\kappa_6\kappa_4 + 39/4\kappa_5^2)\Big\}/\gamma^2 + O\left(1/n^2\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 = {} & \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\sqrt{\beta_1}(-27/2\beta_1{}^2 - 315/4\beta_1 + 216) \\ & +\kappa_2^{-2}(162\kappa_2^{-1/2}\kappa_5 + 81/4\kappa_4\beta_1\sqrt{\beta_1} + 162\kappa_4\sqrt{\beta_1}) \\ & +\kappa_2^{-3}(27/4\kappa_2^{-1/2}\kappa_7\beta_1 + 27\kappa_2^{-1/2}\kappa_7 - 27/8\kappa_6\beta_1\sqrt{\beta_1} - 81/2\kappa_6\sqrt{\beta_1}) \\ & +\kappa_2^{-4}(\kappa_2^{-1/2}\kappa_9 - 54\kappa_2^{-1/2}\kappa_5\kappa_4\beta_1 + 27\kappa_2^{-1/2}\kappa_5\kappa_4 - 9/2\kappa_8\sqrt{\beta_1} + 405/16\kappa_4^2\sqrt{\beta_1}\beta_1) \\ & +\kappa_2^{-5}(-9\kappa_2^{-1/2}\kappa_6\kappa_5 + 27/2\kappa_6\kappa_4\sqrt{\beta_1} + 99/4\kappa_5^2\sqrt{\beta_1})\Big\}/\gamma^3 + O\left(1/n\sqrt{n}\right),\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 = {} & \frac{1}{n}\Big\{81(\beta_1{}^3 - 30\beta_1{}^2 + 176\beta_1 + 16) + \kappa_2^{-2}\kappa_4(-1215/2\beta_1{}^3 - 2187/2\beta_1{}^2 + 11664) \\ & +\kappa_2^{-3}(810\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\beta_1{}^2\sqrt{\beta_1} + 2592\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\beta_1\sqrt{\beta_1} + 15876\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\sqrt{\beta_1} - 2295/4\kappa_6\beta_1{}^2 \\ & -4347\kappa_6\beta_1 + 5400\kappa_6) + \kappa_2^{-4}(891/2\sqrt{\kappa_2}\kappa_7\beta_1\sqrt{\beta_1} + 1134\sqrt{\kappa_2}\kappa_7\sqrt{\beta_1} + 81/16\kappa_8\beta_1{}^2 \\ & -243/2\kappa_8\beta_1 + 891\kappa_8 + 6237/4\kappa_4^2\beta_1{}^2 + 648\kappa_4^2\beta_1 + 17496\kappa_4^2) + \kappa_2^{-5}(-27/2\sqrt{\kappa_2}\kappa_9\beta_1\sqrt{\beta_1} \\ & -108\sqrt{\kappa_2}\kappa_9\sqrt{\beta_1} - 2916\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\kappa_4\beta_1\sqrt{\beta_1} - 5508\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\kappa_4\sqrt{\beta_1} + 27/2\kappa_{10}\beta_1 + 54\kappa_{10} \\ & -1215/8\kappa_6\kappa_4\beta_1{}^2 + 1701/2\kappa_6\kappa_4\beta_1 + 6480\kappa_6\kappa_4 + 2835/2\kappa_5^2\beta_1 + 3240\kappa_5^2) \\ & +\kappa_2^{-6}(-6\sqrt{\kappa_2}\kappa_{11}\sqrt{\beta_1} + 1053/4\sqrt{\kappa_2}\kappa_7\kappa_4\beta_1\sqrt{\beta_1} - 567\sqrt{\kappa_2}\kappa_7\kappa_4\sqrt{\beta_1} \\ & +162\sqrt{\kappa_2}\kappa_6\kappa_5\beta_1\sqrt{\beta_1} - 972\sqrt{\kappa_2}\kappa_6\kappa_5\sqrt{\beta_1} + \kappa_{12} - 297/2\kappa_8\kappa_4\beta_1 + 297\kappa_8\kappa_4 \\ & -513/2\kappa_7\kappa_5\beta_1 + 270\kappa_7\kappa_5 - 81/2\kappa_6^2\beta_1 + 135\kappa_6^2 + 4455/8\kappa_4^3\beta_1{}^2 - 729\kappa_4^3\beta_1 + 2484\kappa_4^3) \\ & +\kappa_2^{-7}(27\sqrt{\kappa_2}\kappa_9\kappa_4\sqrt{\beta_1} + 126\sqrt{\kappa_2}\kappa_8\kappa_5\sqrt{\beta_1} + 54\sqrt{\kappa_2}\kappa_7\kappa_6\sqrt{\beta_1} - 1620\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\kappa_4^2\beta_1\sqrt{\beta_1} \\ & +1701\sqrt{\kappa_2}\kappa_5\kappa_4^2\sqrt{\beta_1} - 18\kappa_9\kappa_5 - 18\kappa_8\kappa_6 + 729/2\kappa_6\kappa_4^2\beta_1 + 5589/4\kappa_5^2\kappa_4\beta_1 - 810\kappa_5^2\kappa_4) \\ & +3\kappa_2^{-8}(-171\sqrt{\kappa_2}\kappa_6\kappa_5\kappa_4\sqrt{\beta_1} - 112\sqrt{\kappa_2}\kappa_5^3\sqrt{\beta_1} + 9\kappa_6^2\kappa_4 + 42\kappa_6\kappa_5^2)\Big\}/\gamma^4 + O(1/n^2).\end{aligned} \tag{10}$$

ただし,

$$\gamma^2 = -9/2\sqrt{\beta_1} + 6 + \kappa_2^{-2}\kappa_4(9/4\sqrt{\beta_1} + 9) + \kappa_2^{-3}(-3\sqrt{\beta_1}\sqrt{\kappa_2}\kappa_5 + \kappa_6) \tag{11}$$

である（γ^2 は $\sqrt{b_1}$の分散の主要項)。

3　種々の母集団の下での近似キュムラント

3.1　正規母集団の場合

母集団 F を標準正規分布とすると，奇数次のキュムラント λ_1，λ_3 は 0 である。また，$\kappa_1=0$，$\kappa_2=1$，$\kappa_3=\kappa_4=\ldots=0$ であるから，偶数次のキュムラントは

$$\lambda_2=1+\frac{1}{n}(-6)+O\left(1/n^2\right), \tag{12}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{n}(36)+O\left(1/n^2\right). \tag{13}$$

といたって簡単になる。もちろんこれらは Pearson[2] の結果と一致する。

$\gamma=\sqrt{6}$ から Edgeworth 展開は以下のようになる：

$$\Pr[\sqrt{B_1}<x]=\Phi(x)-\frac{\varphi(x)}{n}\left[\left\{\frac{3}{2}x(x^2-5)\right\}\right]+O\left(1/n\sqrt{n}\right). \tag{14}$$

ここで，$\Phi(x)$，$\varphi(x)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数である。

また，$\sqrt{B_1}$ の α パーセント点および標本正規分布の α パーセント点をそれぞれ x_α，u_α とすると，Cornish-Fisher 逆展開は以下のようになる：

$$x_\alpha\sim u_\alpha+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}u_\alpha{}^3-\frac{15}{2}u_\alpha\right)+O\left(1/n\sqrt{n}\right). \tag{15}$$

3.2　t-分布の場合

母集団が非正規で対称分布である自由度 ν をもつ t-分布を考える。奇数次キュムラント λ_1，λ_3 は 0 であり，偶数次キュムラント λ_2，λ_4 は次のようになる。

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 1+\frac{1}{n}\left\{\frac{-36(\nu^4+11\nu^3-31\nu^2-14\nu-72)}{(\nu-4)^2(\nu-6)(\nu-8)}\right\}/\gamma^2+O\left(1/n^2\right), && (16)\\ \lambda_4 &= \frac{1}{n}\Big\{1296(\nu^8+30\nu^6-1017\nu^5+2256\nu^4-4992\nu^3+24912\nu^2 && (17)\\ &\quad -25200\nu+61760)/(\nu-4)^3(\nu-6)^2(\nu-8)(\nu-10)(\nu-12)\Big\}/\gamma^4+O\left(1/n^2\right).\end{aligned}$$

ここで，

$$\gamma^2=\frac{6(\nu^2-\nu+10)}{(\nu-4)(\nu-6)} \tag{18}$$

である。

Edgeworth 展開と Cornish-Fisher 逆展開は次のようになる：

$$\Pr\left[\sqrt{B_1} < x\right] \tag{19}$$
$$= \Phi(x) - \frac{\varphi(x)}{n}\left[\frac{x^3-3x}{\gamma^4}\left\{54(\nu^8+30\nu^6-1017\nu^5+2256\nu^4-4992\nu^3\right.\right.$$
$$\left.+24912\nu^2-25200\nu+61760)/(\nu-4)^3(\nu-6)^2(\nu-8)(\nu-10)(\nu-12)\right\}$$
$$\left.+\frac{x}{\gamma^2}\left\{-18(\nu^4+11\nu^3-31\nu^2-14\nu-72)/(\nu-4)^2(\nu-6)(\nu-8)\right\}\right] + O\left(1/n\sqrt{n}\right).$$

$$x_\alpha \sim u_\alpha + \frac{1}{n}\left\{{u_\alpha}^3\left(3(\nu^8+30\nu^6-1017\nu^5+2256\nu^4-4992\nu^3+24912\nu^2-25200\nu\right.\right. \tag{20}$$
$$\left.+61760)/2(\nu^2-\nu+10)^2(\nu-12)(\nu-10)(\nu-8)(\nu-4)\right)$$
$$+u_\alpha\left(-3(\nu-2)(5\nu^7-14\nu^6-202\nu^5+607\nu^4-6022\nu^3+19516\nu^2+27000\nu\right.$$
$$\left.\left.-6240)/2(\nu^2-\nu+10)^2(\nu-12)(\nu-10)(\nu-8)(\nu-4)\right)\right\} + O\left(1/n\sqrt{n}\right).$$

3.3 ガンマ分布の場合

密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)}x^{p-1}\exp^{-x}, \quad p>0$$

のガンマ分布を考える。母集団キュムラントは $\kappa_r=(r-1)!p$ なので，$\sqrt{B_1}$ のキュムラント λ_j は

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(-27/2p^{-3/2}-27/2p^{-1/2}\right)/\gamma + O\left(1/n\sqrt{n}\right), \tag{21}$$

$$\lambda_2 = 1+\frac{1}{n}\left(-2817/2p^{-1}-5409p^{-2}-8073/2p^{-3}-36\right)/\gamma^4 + O\left(1/n^2\right), \tag{22}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(432p^{-1/2}+5202p^{-3/2}+14148p^{-5/2}+9378p^{-7/2}\right)/\gamma^3 + O\left(1/n\sqrt{n}\right), \tag{23}$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{n}\left(127008p^{-1}+2001024p^{-2}+10010304p^{-3}+18147888p^{-4}\right. \tag{24}$$
$$\left.+10012896p^{-5}+1296\right)/\gamma^4 + O\left(1/n^2\right),$$

になる。ここで

$$\gamma = \sqrt{36p^{-1}+30p^{-2}+6}. \tag{25}$$

Edgeworth 展開と Cornish-Fisher 逆展開は次の通り：

$$\Pr\left[\sqrt{B_1} < x\right] \tag{26}$$
$$= \Phi(x) - \varphi(x)\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\gamma}(-27/2p^{-3/2}-27/2p^{-1/2})\right.\right.$$

$$+\frac{x^2-1}{\gamma^3}\left(72p^{-1/2}+867p^{-3/2}+2358p^{-5/2}+1563p^{-7/2}\right)\Big\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{x^5-10x+15x}{\gamma^6}\Big(2592p^{-1}+62424p^{-2}+1091241/2p^{-3}\right.$$

$$+2156922p^{-4}+4135203p^{-5}+3685554p^{-6}+2442969/2p^{-7}\Big)$$

$$+\frac{x^3-3x}{\gamma^4}\Big(4320p^{-1}+141399/2p^{-2}-3633/2p^{-3}$$

$$+1406457/2p^{-4}+792207/2p^{-5}+54)$$

$$\left.+\frac{x}{\gamma^2}\left(-4905/8p^{-1}-10089/4p^{-2}-15417/8p^{-3}-18\right)\right\}\Big]+O\left(1/n\sqrt{n}\right),$$

$$x_\alpha = u_\alpha+\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{(125+450p+615p^2+396p^3+123p^4+18p^5+p^6)\sqrt{30+36p+6p^2}}\right. \tag{27}$$

$$\Big\{(-8200p^{-1/2}-66435/2p^{-1/2}p-53553p^{-1/2}p^2-87645/2p^{-1/2}p^3$$

$$-19350p^{-1/2}p^4-9165/2p^{-1/2}p^5-545p^{-1/2}p^6-51/2p^{-1/2}p^7)$$

$$+u_\alpha{}^2(13025/2p^{-1/2}+25455p^{-1/2}p+78351/2p^{-1/2}p^2+30174p^{-1/2}p^3$$

$$+24687/2p^{-1/2}p^4+2679p^{-1/2}p^5+577/2p^{-1/2}p^6+12p^{-1/2}p^7)\Big\}\Big\}$$

$$+\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{125+450p+615p^2+396p^3+123p^4+18p^5+p^6}\{u_\alpha(-1537973/4\right.$$

$$-754165/6p^{-1}-10575505/24p-476665/2p^2$$

$$-776585/12p^3-34895/4p^4-4011/8p^5-15/2p^6)$$

$$+u_\alpha{}^3(212611/2+423899/12p^{-1}+713809/6p+124315/2p^2$$

$$+193355/12p^3+4099/2p^4+108p^5+3/2p^6)\Big\}\Big\}+O\left(1/n\sqrt{n}\right).$$

4 数値的検討

表1はサンプルサイズ $n=30\sim100$ に対する偶数次キュムラント数値的振る舞いを示している。分布の自由度 ν が増加するにつれて，(16) の値がゆるやかに正規分布の値 (12) に近づいてゆく。(22) の値もパラメータ p が増加するにつれゆるやかに (12) に近づく様子がわかる。4次キュムラントの場合も同様である。

$\alpha=0.025$, $n=30\sim100$ ($u_\alpha=1.9600$) に対するパーセント点は Cornish-Fisher 逆展開の式から表2で与えられる。

表 1 The behavior of even cumulants

λ_2		$n=30$	$n=40$	$n=50$	$n=100$
(12)		0.80000	0.85000	0.88000	0.94000
(16)	$\nu=15$	0.04967	0.28725	0.42980	0.71490
	$\nu=30$	0.57144	0.67858	0.74286	0.87143
	$\nu=100$	0.74707	0.81030	0.84824	0.92412
	$\nu=1000$	0.79515	0.84637	0.87709	0.93855
(22)	$p=15$	0.39400	0.54550	0.63640	0.81820
	$p=30$	0.58936	0.69202	0.75361	0.87681
	$p=100$	0.73477	0.80108	0.84086	0.92043
	$p=1000$	0.79339	0.84504	0.87603	0.93802

λ_4		$n=30$	$n=40$	$n=50$	$n=100$
(13)		1.20000	0.90000	0.72000	0.36000
(17)	$\nu=15$	47.97630	35.98223	28.78578	14.39289
	$\nu=30$	4.92878	3.69659	2.95727	1.47863
	$\nu=100$	1.75033	1.31275	1.05020	0.52510
	$\nu=1000$	1.24420	0.93315	0.74652	0.37326
(24)	$p=15$	10.06820	7.55115	6.04092	3.02046
	$p=30$	5.19008	3.89256	3.11405	1.55703
	$p=100$	2.28577	1.71433	1.37146	0.68573
	$p=1000$	1.30376	0.97782	0.78225	0.39113

表 2 Cornish-Fisher inverse expansion for percentiles

$x_{0.025}$		$n=30$	$n=40$	$n=50$	$n=100$
(15)		1.84648	1.87486	1.89189	1.92594
(20)	$\nu=15$	4.32612	3.73459	3.37967	2.66984
	$\nu=30$	1.87877	1.89907	1.91126	1.93563
	$\nu=100$	1.83243	1.86432	1.88346	1.92173
	$\nu=1000$	1.84477	1.87357	1.89086	1.92543
(27)	$p=15$	2.20950	2.20791	2.20118	1.16464
	$p=30$	2.08006	2.08850	2.08990	2.07812
	$p=100$	1.97546	1.99049	1.99771	2.00497
	$p=1000$	1.89175	1.91448	1.92758	1.95163

参考文献

1) 中川重和, 仁木直人：対称式の変換アルゴリズムとその多変量統計量分布論への応用. 計算機統計学, **4**, pp. 35—43, 1991.

2) E. S. Pearson : A further development of tests for normality. *Biometrika*, **22**, pp. 239—249, 1930.

3) P. Williams : Note on the sampling distribution of $\sqrt{b_1}$ when the population is normal. *Biometrika*, **27**, pp. 269—272, 1935.

4) R. D'agostino and E. S. Pearson : Test for departure from normality. Empirical results for the distribution of b_2 and $\sqrt{b_1}$. *Biometrika*, **60**, pp. 613—622, 1973.

Higher Order Cumulants of Distribution of $\sqrt{b_1}$ for Nonnormal Populations

Yoshihiro FUKUHARA, Shigekazu NAKAGAWA*, Naoto NIKI**
and Minoru ICHIMURA*
Graduate School of Science,
**Department of Applied Mathematics,*
Okayama University of Science,
Okayama 700, Japan
***Department of Management Science,*
Science University of Tokyo,
Tokyo 162, Japan

Let $\sqrt{b_1}$ be the standardized third moment statistic in random samples of n observations from a nonnormal population. We only assume that the population has finite cumulants of requisite order. In this papar, the higher order cumulants of $\sqrt{b_1}$ required for deriving the Edgeworth expansion up to order $1/n$ are given.