非定常移流拡散問題に対する仮想粘性法の提案

榊　原　道　夫*・仁　木　　滉**
アブドーラシッド***

*岡山理科大学・特別研究生
**岡山理科大学理学部応用数学科
***岡山理科大学大学院応用数学専攻・修士課程

（昭和62年９月30日　受理）

１．まえがき

本報告において取り上げられる問題は非定常移流拡散問題：

Ｐ１

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{in } (0,\ 1)\times(0,\ T] \tag{1.1}$$

$$u(x,\ 0)=f(x) \qquad \text{in } (0,\ 1) \tag{1.2}$$

$$u(0,\ t)=\alpha, \qquad u(1,\ t)=\beta \tag{1.3}$$

である．問題（Ｐ１）に対する数値解法として，差分法および有限要素法の適用が考えられる．いま空間方向の離散化に中心差分法を（1．1）に適用するならば，半離散系

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}+b\frac{v_{n+1}-v_{n-1}}{2h}=a\frac{v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}}{h^2} \tag{1.4}$$

を得る．簡単のためここで，b および a は共に正定数であると仮定する．また h は空間変数に対する微分作用素を差分作用素に置き換えるときに現れる空間きざみ幅である．Price, Varga および Warren(P-V-W)［１］らは半離散系（1．4）の時間微分に対して適当な離散化を適用して得られる全離散化式に対する考察を示した．その考察より得られた重要な結果の１つは，移流項 $\{b(\partial u/\partial x)\}$ が支配的となる条件下（すなわち a が非常に小さくなる場合，または b が非常に大きくなる場合）では数値解が非物理的振動解となることが見いだされたことである．実際問題に対する応用において，度々そのような条件下の問題が現れる．例えば層流中での物質移動問題および激しい流れの中での物質移動または熱移動現象問題などである．ところでＰ-Ｖ-Ｗの論文ではそのような非物理的振動解を抑える１つの解決法が提示されている．彼らの提示した解法は移流項に対

して後退差分を適用するアルゴリズムである．すなわち（1．1）に対する離散化式として（1．4）の代わりに

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}+b\frac{v_n-v_{n-1}}{h}=a\frac{v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}}{h^2} \qquad (1.5)$$

を用いる解法である．より正確に述べるならばローカル・ペクレ数 $L:=(bh)/a$ が2より大きい条件下において非物理的振動解が生じる．そのことより非物理的振動解を抑える自明な1つの方法は $L<2$ となるように与えられた問題に対して h を選ぶ方法である．しかし物質移動問題において a が乱流拡散係数でないならば a の次数は $10^{-5}\sim10^{-6}$ である．そのような問題に対して（1．4）を適用し，なめらかな解を得ようとするならば h もやはり $10^{-5}\sim10^{-6}$ の次数以下にしなければならない．時間方向の離散化に陰解法を適用するならば $10^5\sim10^6$ の次数の線形方程式を解かなければならない（しかもこれは空間が1次元の場合である）．時間方向の離散化に陽解法を用いた場合はスキームの安定化をはかるために拡散数 λ は

$$\lambda:=[(a\Delta t)/h^2]<1/2$$

としなければならないため時間方向のきざみ幅 Δt を小さくしなければならず，目的とする時間での現象をシュミレーションするのに多くの計算時間を必要とする．現今はスーパー・コンピューターの発達により問題によっては（1．4）の適用で十分な場合が増えてきている．しかしあまりきざみ幅 h を小さくすることを必要としないアルゴリズムも有用である．（1．5）は上流法と呼ばれる解法の1つで任意のローカル・ペクレ数に対してなめらかな解を与える．しかし多次元問題（2または3次元）において上流の決定に難があるようである．また解が急激に変化するようなところ（例えば温度境界層）においてあまり精度がよくなく，拡散係数が実際の問題よりも大きい場合の解が現れる．その様な問題意識の上で本報告では大きいローカルペクレ数に対してなめらかな解を与える新しい方法を提案する．ここで示される方法は Roach［2］により示された人工粘性項を導入する方法に類似している．しかし本解法は人工粘性法とは異なり，人工粘性によりもたらされる解の精度悪化を防ぐ工夫が施されている．次に精度の解析および安定性の考察を行い提案される解法の有効性を検討する．また数値実験により，より詳しい検討を行う．

2．非物理的振動解

本節では，非物理的振動解を考察するにあたり必要とされる予備知識が示される．中心差分を適用した場合非物理的振動解が $L>2$ において現れることは離散系（差分方程式）の特性解より理解できる．そのことを説明するため定常移流拡散方程式：

$$-a(d^2u/dx^2)+b(du/dx)=0 \tag{2. 1}$$

について考える．(2．1) へ中心差分を適用することにより差分方程式：

$$(1-L/2)U_{n+1}-2U_n+(1+L/2)U_{n-1}=0 \tag{2. 2}$$

を得る．(2．2) に対する特性方程式：

$(1-L/2)\Lambda^2-2\Lambda+(1+L/2)=0$の解は

$$\Lambda_1=(1+L/2)/(1-L/2) \quad ; \quad \Lambda_2=1 \tag{2. 3}$$

であり差分方程式 (2．2) の一般解は

$$U_n=A(\Lambda_1)^n+B \tag{2. 4}$$

と表される．ここで A および B は境界条件により決定される定数である．またこのように差分方程式の解により表すために任意の n に対して $h=x_{n+1}-x_n$ と仮定する．

(2．3) より $\Lambda_1<0$ならば差分方程式 (2．2) の解はその巾乗により表されるため，解が振動解となることがわかる．すなわち非物理的振動解に対する安定性の定義として次のような定義が適当であると考えられる．

［定義：$L-$安定］ 方程式 (2．1) を離散化して得られる差分方程式の特性解が正値となるときそのような L に対してその離散スキームは $L-$安定であると定義する．■

中心差分法を適用した場合は $L<2$において $L-$安定であることが (2．3) より明かである．P-V-W らの上流法を適用した場合は $\Lambda_1=(1+L/2)$，$\Lambda_2=1$であるため任意の L に対して $L-$安定である．有限要素法を適用した場合についても同様の $L-$安定解析が行える．池内，榊原，仁木 [3] は Lagrange 要素を用いた場合について岡本，仁木 [4] は Hermite 要素を用いた場合についての報告がなされている．また選点法を用いた場合およびより詳しい解析については Jensen-Finleyson [5] の報告が存在する．(2．2) に示された 1 次元問題に限らずここで示した $L-$安定解析は 2 次元および 3 次元問題に対しても適用できる．2 次元問題に対しての報告は [6] に 3 次元問題に対する報告は [7] を参照されたい．1 次元問題を扱う場合と 2 次元および 3 次元問題を扱う場合では少し異なる状況が存在する．1 次元問題の場合は特性解は L についての有理関数であるが，2 および 3 次元問題では特性解は有理関数と無理関数の和の形として表される．いま 2 次元定常移流拡散方程式：

$$-a\{(\partial^2u/\partial x^2)+(\partial^2u/\partial y^2)\}+b(\partial u/\partial x)=0 \tag{2. 5}$$

へ中心差分法を適用した場合流れのある方向 ($x-$方向) に対する離散化式の特性解は

$\Lambda_1=D/A+[(D/A)^2-(B/A)]^{1/2}$,

$\Lambda_2=D/A+[(D/A)^2-(B/A)]^{1/2}$,

$$D=1-Kh_y,\quad A=1-L/2,\quad B=1+L/2,\quad (L=(bh_x)/a) \tag{2. 6}$$

である．ここでKは変数分離することにより現れる定数である．2次元問題の場合は$L-$安定領域は流れと直交する方向の分割にも依存する．非定常問題に対して$L-$安定解析を行う場合，2次元問題へ適用した場合と同様の状況が現れる．すなわち特性解は（2. 6)に示されたような形で与えられる．この事は非定常問題においてはL－安定領域が多少改善されることを示す．

3．仮想的粘性項の導入

2節において定義されたL－安定領域を広げる方法を定式化する．方程式（1. 1）に仮想的な拡散項（または粘性項）を導入した方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\varepsilon-\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{in } (0,\ 1)\times(0,\ T] \tag{3. 1}$$

を考える．ただし$\varepsilon>0$と仮定する．(3. 1）へ半陰的解法を適用した離散化：

$$(d-c)V^{m+1}_{n+1}-(2d+1)V^{m+1}_{n}+(d+c)V^{m+1}_{n-1}=DV^{m}_{n+1}-(2D+1)V^{m}_{n}+DV^{m}_{n-1} \tag{3. 2}$$

を考察する．ここで

$$d=(a+\varepsilon)\Delta t/h^2,\quad c=b\Delta t/(2h),\quad D=\varepsilon\Delta t/h^2$$

である．差分方程式（3. 2）の同次方程式に対する特性方程式は

$$(d-c)\Lambda^2-(2d+1)\Lambda+(d+c)=0 \tag{3. 3}$$

であり，その特性解は

$$\Lambda_1=\frac{1}{2}\left[\frac{2d+1}{d-c}-\left\{\left(\frac{2d+1}{d-c}\right)^2-4\frac{d+c}{d-c}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3. 4}$$

$$\Lambda_2=\frac{1}{2}\left[\frac{2d+1}{d-c}+\left\{\left(\frac{2d+1}{d-c}\right)^2-4\frac{d+c}{d-c}\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \tag{3. 5}$$

である．図1および図2は（3. 4）および（3. 5）により，それぞれ計算されたものが示されている．Λ_1は定常の場合と同様の振舞を示すが，Λ_2は定常の場合とは異なり特異点を有する．しかし特異点を挟んで特性解の符号は変化せず常に正である．特異点より大きなbでは1次元問題および2次元問題の場合と同様な振舞いを示す．εを増大さすことにより特性解の符号が正の領域（$L-$安定領域）が増大することは特性解より明らかである．Roachにより示された人工粘性項を導入する方法も，$L-$安定性の振舞いは図2

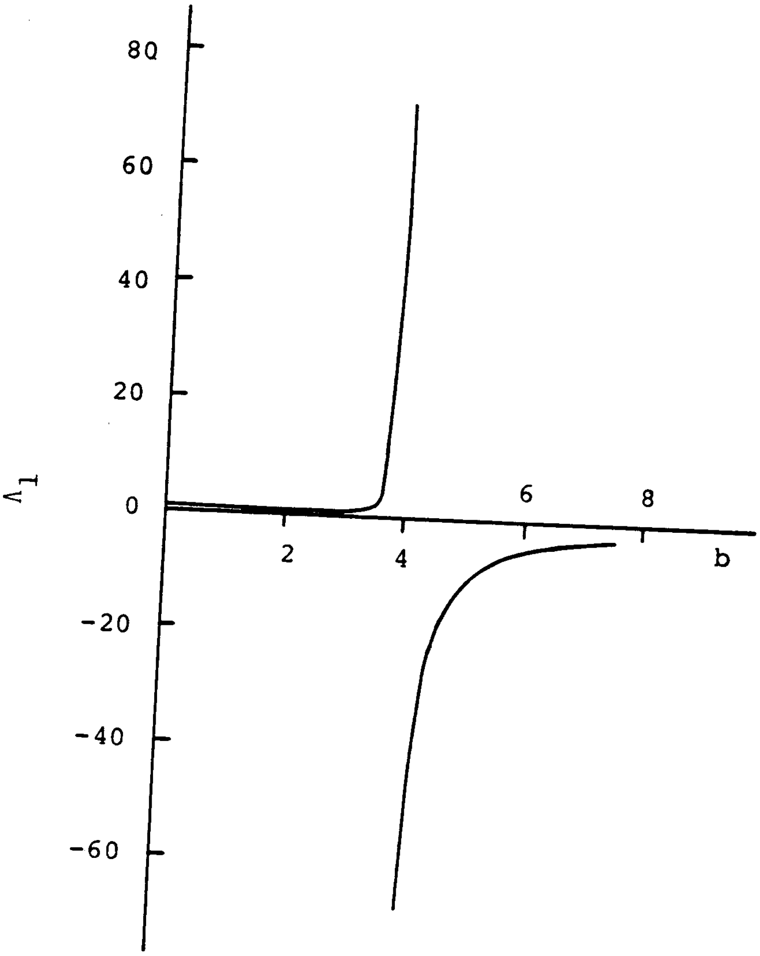

図1．特性解 Λ_1 の速度 b に対する振舞

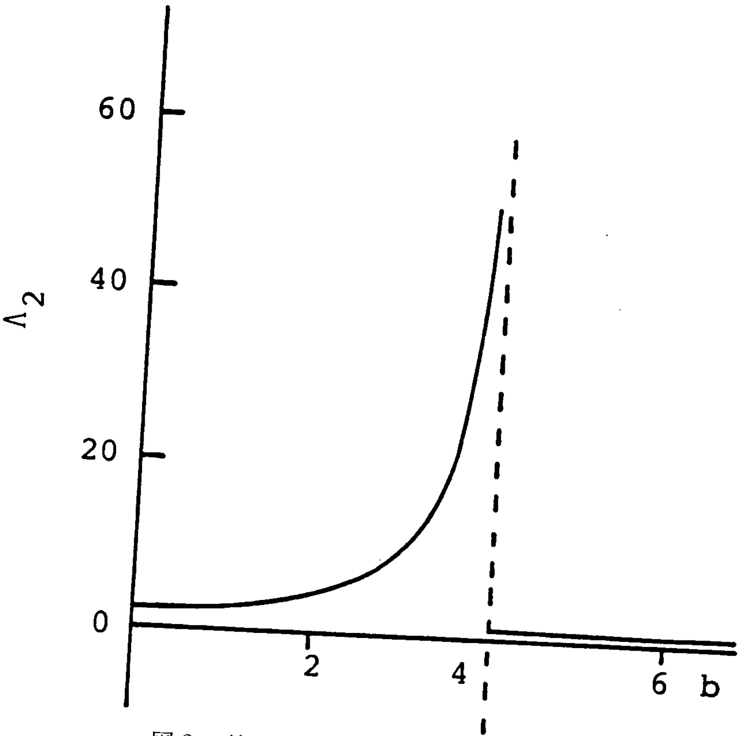

図2．特性解 Λ_2 の速度 b に対する振舞

において示されたものと同様である．しかし離散スキーム（3．2）を用いる場合は m ステップ目の数値解に反拡散作用素の離散版を作用させているため，ε の導入により発生する誤差の増大を原理的に抑えることができる．このことを拡散問題の場合について考察する．簡単のために移流項を無視し仮想粘性項を付加した拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\varepsilon-\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3. 6}$$

について考察する．離散化の方法として次式が考えられる．すなわち

$$dV^{m+1}_{n+1}-(2d+1)V^{m+1}_{n}+dV^{m+1}_{n-1}=DV^{m}_{n+1}-(2D+1)V^{m}_{n}+DV^{m}_{n-1} \tag{3. 7}$$

である．方程式（3．6）の解を差分方程式（3．7）へ適用することにより，スキームの打ち切り誤差を評価することができる．（3．7）の残差を $r(x,\ y)$ とする．

そのとき u は（3．7）の差分方程式を正確に満足しないため残差 $r(x,\ t)$ は

$$\begin{aligned}r(x,\ t)=\Delta t\{(u(x,t+\Delta t)-u(x,\ t))/\Delta t\}\\ -\Delta t\{(a+\varepsilon)M[u(x,\ t+\Delta t)]-\varepsilon M[u(x,\ t)]\}\end{aligned} \tag{3. 8}$$

と表される．ここで

$M[u(x,\ t)]=u(x+h,\ t)-2u(x,\ t)+u(x-h,\ t)$

である．いま初期関数 $f(x)$ が十分に滑らかであると仮定するならば，$u(x,\ t)$ も十分に滑らかである．そのときテーラー展開を用いることにより

$$aM[u(x,\ t)]/h^2=a\{u_{xx}+(h^2/12)u_{xxxx}{}^{\wedge}\}$$

$$\{u(x,\ t+\Delta t)-u(x,\ t)\}/\Delta t=ut+(\Delta t/2)u_{tt}{}^{\wedge}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}&\mathrm{a\,M}[u(x,\ t+\Delta t)]\\ &\quad=a\{M[u]+M[u_t]\ \Delta t+(1/2)M[u_{tt}]\Delta t^2+\cdot\cdot\cdot\}\end{aligned}$$

である．すなわち

$$\begin{aligned}a\{M[u(x,t+\Delta t)]/h^2\}=a\{&(u_{xx}+(h^2/ab)u_{xxxx}{}^{\wedge})\\ &+\ (u_{txx}+(h^2/12)u_{xxxx}{}^{\wedge})\Delta t+\cdot\cdot\cdot\}\end{aligned}$$

を得る．ところで u は十分滑らかであると仮定しているため $u_{txx}=au_{xxxx}$ が成立する．

（3．8）および以上のことより

$$\begin{aligned}r(x,\ t)=\Delta t\{&u_t+(\Delta t/2)u_{tt}{}^{\wedge}\}\\ &-\Delta ta(u_{xx}+(h^2/12)u_{xxxx}{}^{\wedge})+\\ &+(a+\varepsilon)(u_{xxxx}{}^{\wedge}+(h^2/12)u_{txxxx}{}^{\wedge})\Delta t\end{aligned}$$

を得る．また $u_t = au_{xx}$ であるため

$$r(x,\ t) = (\Delta t^2/2)u_{tt}$$

$$-\Delta t(a+\varepsilon)\{(h^2/12)u_{xxxx}\hat{\ }) + (u_{xxxx} + (h^2/12)u_{txxxx}\hat{\ })\Delta t\}$$

と簡略化できる．ここで $u\hat{\ }$ は u の適当な中間値を表す．初期関数を f とし x についての4階の偏微分を f^{IU} により表すならば，$u^{\mathrm{IU}}{}_{\mathrm{t}} = u^{\mathrm{UI}}$ である．$|u|$ を u の最大値ノルムとする．$u_t = au_{xx}$ が最大値原理，すなわち $|u| \leqq l.\ u.\ b. |f|$ を満足するため，同様に $|u^{\mathrm{IU}}| \leqq l.\ u.\ b. |f^{\mathrm{IU}}|$ が成立する．それゆえに残差 r を初期値により押さえる評価式が得られる．

定理１．

$$|r| \leqq C\left[\left\{\frac{1}{2} + a(a+\varepsilon)\left(1+\frac{h_2}{12}\right)\Delta t^2 + \frac{h^2\Delta t}{12}\right\}\right]$$

ここで

$$\mathrm{C} = \mathrm{max}\ \{\mathrm{f}^{\mathrm{IU}},\ \mathrm{f}^{\mathrm{UI}}\}$$

である．■

４．数値実験

１次元の簡単な問題を取り上げ数値実験を行う．問題として方程式（1．1）へ初期値および境界値：

$$f(x) = 10\sin(\pi x),\quad u(0) = u(1) = 0$$

を付加したものを考える．その数値例を図３に示す．図３において実線は中心差分によ

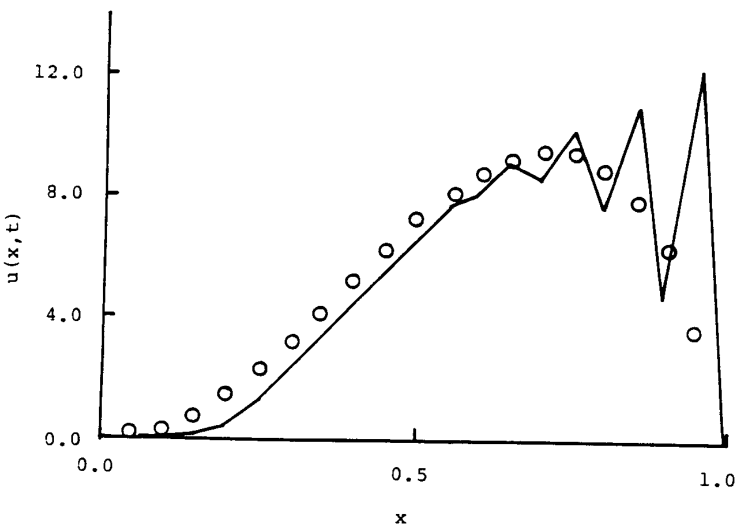

図３．中心差分解と仮想粘性法による数値解の比較

る解である．白丸は本報告において示した方法による数値解である．筆者らの提案する方法ではL－安定な解が得られている．また図3は $t=0.25$，$\Delta t=0.05$，$h=0.05$，$a=0.001$，$b=1.0$ の条件において計算されたものである．仮想粘性法による計算値は仮想粘性が $\varepsilon=1.0$ の場合である．

5．まとめ

非定常移流拡散問題に対する数値解法の定式化を示した．本解法は仮想粘性項を導入することにより数値解の振動を抑える解法である．人工粘性法の場合とは異なり中心差分法に近い数値解を計算することが可能である．しかし定理1より仮想粘性 ε は任意に大きくすることができないことがわかる．与えられた条件に対して L－安定解を与える最小の ε を用いることが望まれる．また特性解の振舞いを定常および非定常の場合と比べるとき Λ_2 の振舞いが異なることが分かった．この事は数値解のより詳しい誤差の振舞いを研究する上で重要な事と思われる．

参考文献

[1] Price, H.S., Varga,R.S. and Warren, J.E., Application of oscillation matrices to diffusion-convection equations, J ,Math. and Phsy., 44-45, 301-311 (1965-66).

[2] Roach, P.J., Computational fluid dynamics, Hermosa Pub. (1976).

[3] Ikeuchi, M., Sakakihara,M. and Niki, H., Stability of finite element solution for steady-state convective diffusion equations, Trans. I E C E Japan, E65, 684-685 (1982)

[4] Okamoto, N. and Niki, H., A note on the stability and accuracy of C^n finite elements in steady diffusion convection problems, Int. Num. Meth. in Fluids, 5, 805-816 (1985).

[5] Jesen, K.O. and Finlayson, B.A., Oscillation limits for weighted residual methods applied to convective diffusion equations, Int. J. Num Meth. Engng., 10, 1681-1689 (1980).

[6] Okamoto, N., Sakakihara, M., lkeuchi, M. and Niki, H., On the stable finite element solution of 1-and 2-dimensional diffusion convection equations, Proceeding of the 4th International Symposium of Finite Element Methods in Flow Problems, ed. T. Kawai, University of Tokyo Press, 741-748 (1982).

[7] Ikeuchi, M., Niki, H. and Kobayashi. H., Finite elemente steady-state solutions of the traveling magnetic field problem, IEEE Trans., MAG-19, 1524-1529 (1983).

FORMULATION OF VIRTUAL VISCOUSITY METHOD FOR UNSTEADY STATE CONVECTIVE DIFFUSION PROBLEM

Micho SAKAKIHARA* Hiroshi NIKI** Abdurisit***

**Department of Applied Mathemtics, Okayama University of Science, Ridai-cho 1-1, Okayama 700 Japan.*

***Department of Applied Mathematics, Okayama University of Science, Ridai-cho 1-1, Okayama 700 Japan.*

****Graduate School of Applied Mathematics, Okayama University of Science, Ridai-cho 1-1, Okayama 700 Japan*

(Received September 30, 1987)

Nonphysical oscilated solutions occur in the calculation of numerical solutions for convective diffusion problems under the convective dominant condition. In order to avoid such solutions Roach proposed the artificial viscousity method. The accuracy of numerical solution with Roach's method, however, is not as exact since the artificial viscousity term is added to the original equation in the formulation of Roach's method. In order to get accurate numerical solutions we propose the virtual viscousity method in this paper. An error estimate and a stabity analysis for the present method are also discussed.