

## FFT成分を用いた応答波形の表現式

麻谷 淳・東 恒人・島田 恭宏

岡山理科大学工学部情報工学科

(2010年9月15日受付、2010年11月9日受理)

### 1. まえがき

高速フーリエ変換(FFT)は、波形を構成する周波数成分を分析する手法<sup>(1)-(3)</sup>として、計測分野や情報通信分野でよく用いられている。しかし、FFTを波形の標本値列に適用されて得られるFFT成分は、パワースペクトルの計算に利用されることが大半であるために、たとえば、回路などのシステムからの応答波形を計算する場合のFFT成分の取り扱い方が不明確である。

FFT成分の特徴を考慮すると、波形の表現式が得られることが報告<sup>(4)</sup>されている。そこで、これの結果を利用して、本論文では、時間領域および周波数領域において、システムからの応答波形の表現式を求め、両領域における表現式を比較している。

本論文の要点は以下の通りである。

#### ① 応答波形の表現式

時間領域においては、もとの表現式における振幅と位相に応答関数の振幅特性と位相特性を作用させることによって、応答波形の表現式が、直接、得られる。

周波数領域においては、もとの波形に関するFFT成分とフーリエ変換成分の対応関係を利用することによって、システムからの応答波形のフーリエ変換成分から、応答波形のFFT成分が得られる。このFFT成分を用いると、システムからの応答波形の表現式が得られる。

② 時間領域および周波数領域における応答波形のそれぞれの表現式は、FFT成分間の大きさを考慮すると、実質的に一致する。

論文内容をわかりやすくするために、まず、FFT成分の特徴を考慮すると、波形の表現式が得られる<sup>(4)</sup>ことを紹介しておく。

### 2. FFT成分を用いた一般波形の表現式<sup>(4)</sup>

波形が時間 $T$ 内で $k$ 回振動する場合、その周波数 $f_k$ と角周波数 $\omega_k$ はそれぞれ次式で定義される。

$$f_k = k/T, \quad \omega_k = 2\pi \cdot f_k \quad (1)$$

時間 $T$ 内の波形 $v_r(t)$ を標本化時間間隔 $\Delta t$ で標本化し、 $N$ 個の標本値 $v_r(t)$ ,  $n=0,1,\dots,N-1$ を生成す

る。なお、次式が成り立つ。

$$t_n = n \cdot \Delta t, \quad \Delta t = T/N \quad (2)$$

$N$ 個の標本値 $v_r(t_n)$ にFFTを適用すると、FFT成分として虚数成分 $C_i(h)$ と実数成分 $C_r(h)$ が得られる。

なお、 $h=0,1,\dots,N-1$ である。

$C_i(h)$ として、 $C_i(k)$ と $C_i(N-k)$ で表される虚数成分対がある。

$C_r(h)$ として、 $C_r(k)$ と $C_r(N-k)$ で表せる実数成分対、 $C_r(N/2)$ および $C_r(0)$ で表せる実数成分がある。

なお、 $k=1,\dots,N/2-1$ である。

虚数成分対 $C_i(k)$ と $C_i(N-k)$ は $b_k \sin(\omega_k t)$ のFFT成分であり、図1(a)に示すような関係にあり、次式が成り立つ。

$$|C_i(k)| = |C_i(N-k)|, \quad C_i(k) \cdot C_i(N-k) < 0 \quad (3)$$

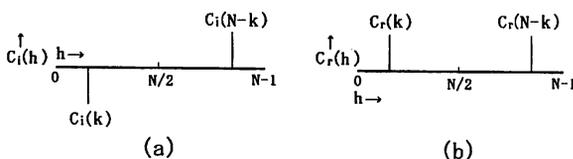


図1. FFT成分

逆に、この関係が成り立つ場合、この成分で構成される波形は $b_k \sin(\omega_k t)$ であり、その振幅 $b_k$ は次式から得られる。

$$b_k = \{-C_i(k) + C_i(N-k)\} / N \quad (4)$$

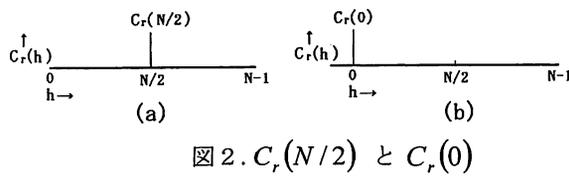
実数成分対 $C_r(k)$ と $C_r(N-k)$ は $a_k \cos(\omega_k t)$ のFFT成分であり、図1(b)に示すような関係にあり、次式が成り立つ。

$$C_r(k) \cdot C_r(N-k) > 0, \quad |C_r(k)| = |C_r(N-k)| \quad (5)$$

逆に、この関係が成り立つ場合、この成分で構成される波形は $a_k \cos(\omega_k t)$ であり、その振幅 $a_k$ は次式から得られる。

$$a_k = \{C_r(k) + C_r(N-k)\} / N \quad (6)$$

実数のFFT成分 $C_r(N/2)$ は、図2(a)のように分布し、最大角周波数 $\omega_{N/2}$ の $a_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t)$ のFFT成分である。

図2.  $C_r(N/2)$  と  $C_r(0)$ 

逆に、このFFT成分で構成される波形は、 $a_{N/2} \times \cos(\omega_{N/2}t)$  であり、その振幅  $a_{N/2}$  は次式から得られる。

$$a_{N/2} = C_r(N/2)/N \quad (7)$$

実数のFFT成分  $C_r(0)$  は、図2(b)のように分布し、直流のFFT成分である。

逆に、このFFT成分で構成される波形は、直流  $a_0$  であり、その振幅  $a_0$  は次式で表せる。

$$a_0 = C_r(0)/N \quad (8)$$

なお、次式が成り立つ。

$$C_i(N/2) = 0, \quad C_i(0) = 0 \quad (9)$$

以上のことから、FFT成分  $C_r(h)$  と  $C_i(h)$  が既知であると、これらの成分で構成される一般波形は、次式で表現されることがわかる。

$$v_r(t_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} b_k \sin(\omega_k t_n) + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_k \cos(\omega_k t_n) + a_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t_n) \quad (10)$$

式(10)は次式の標本値と考えることができる。

$$v_r(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N/2-1} b_k \sin(\omega_k t) + \sum_{k=1}^{N/2-1} a_k \cos(\omega_k t) + a_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t) \quad (11)$$

### 3. FFT成分とフーリエ変換成分の関係

$b_k \sin(\omega_k t)$  と  $a_k \cos(\omega_k t)$  のそれぞれのフーリエ変換成分を  $S_s(\omega_k)$  と  $S_c(\omega_k)$  とすると、次式が成り立つ。なお、 $k=1, 2, \dots$  であり、 $\delta(\omega)$  はデルタ関数である。

$$\begin{aligned} S_s(\omega) &= ib_k \left( -\frac{1}{2} \right) \delta(\omega - \omega_k) + ib_k \left( +\frac{1}{2} \right) \delta(\omega + \omega_k) \\ &= ib_k S_{oi}^+(\omega_k) + ib_k S_{oi}^-(\omega_k) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= a_k \left( +\frac{1}{2} \right) \delta(\omega - \omega_k) + a_k \left( +\frac{1}{2} \right) \delta(\omega + \omega_k) \\ &= a_k S_{or}^+(\omega_k) + a_k S_{or}^-(\omega_k) \end{aligned} \quad (13)$$

これらの成分は、図3に示すような関係にある。また、 $S_{oi}^+(\omega_k)$  と  $S_{or}^+(\omega_k)$  は共に正の周波数成分であり、 $S_{oi}^-(\omega_k)$  と  $S_{or}^-(\omega_k)$  はそれぞれ負の周波数成分で

ある。なお、これらの成分間では次式が成り立つ。

$$S_{oi}^+(\omega_k) \cdot S_{oi}^-(\omega_k) < 0, \quad |S_{oi}^+(\omega_k)| = |S_{oi}^-(\omega_k)| \quad (14)$$

$$S_{or}^+(\omega_k) \cdot S_{or}^-(\omega_k) > 0, \quad |S_{or}^+(\omega_k)| = |S_{or}^-(\omega_k)| \quad (15)$$

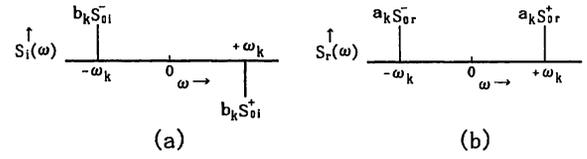


図3. フーリエ変換成分

なお、直流  $a_0$  のフーリエ変換を  $S(\omega_0)$  とすると、これらの成分は、図4に示すように分布し、次式で表せる。

$$S(\omega_0) = a_0 S_{or}(\omega_0) = a_0 \delta(\omega - \omega_0), \quad \omega_0 = 0 \quad (16)$$

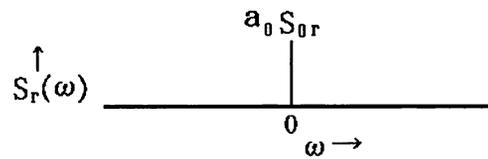


図4. 直流のフーリエ変換成分

図1と図3から明らかなように、式(14)、式(15)と式(3)、式(5)の関係から、次式が成り立つ。

$$b_k S_{oi}^+(\omega_k) \leftrightarrow C_i(k), \quad b_k S_{oi}^-(\omega_k) \leftrightarrow C_i(N-k) \quad (17)$$

$$a_k S_{or}^+(\omega_k) \leftrightarrow C_r(k), \quad a_k S_{or}^-(\omega_k) \leftrightarrow C_r(N-k) \quad (18)$$

これらの関係から、 $C_i(k)$  と  $C_r(k)$  は共に正の周波数成分に、 $C_i(N-k)$  と  $C_r(N-k)$  は共に負の周波数成分に対応することがわかる。

図2(b)と図4から明らかなように、式(8)と式(16)から、次式が成り立つ。

$$a_0 S_{or}(\omega_0) \leftrightarrow C_r(0) \quad (19)$$

### 4. 一般波形に対する応答波形の表現式

#### 4.1 時間領域における応答波形処理

システムの応答関数を  $W(\omega)$  とすると、応答関数は次式で表せる。

$$W(\omega) = |W(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (20)$$

なお、 $|W(\omega)|$  は応答関数の大きさであり、 $\varphi(\omega)$  は応答関数の位相である。

式(10)で表された波形  $v_r(t)$  がシステムを通過した波形、すなわち、応答波形  $v_r^p(t)$  は次式で表せる。

$$\begin{aligned} v_r^p(t) &= a_0 |W(\omega_0)| \\ &+ \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| b_k \sin\{\omega_k t + \varphi(\omega_k)\} \\ &+ \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| a_k \cos\{\omega_k t + \varphi(\omega_k)\} \\ &+ |W(\omega_{N/2})| a_{N/2} \cos\{\omega_{N/2} t + \varphi(\omega_{N/2})\} \end{aligned} \quad (21)$$

この応答波形の標本値  $v_r^P(t_n)$  は次式で表現される。

$$\begin{aligned} v_r^P(t_n) &= a_0 |W(\omega_0)| \\ &+ \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| b_k \sin\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\} \\ &+ \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| a_k \cos\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\} \\ &+ |W(\omega_{N/2})| a_{N/2} \cos\{\omega_{N/2} t_n + \varphi(\omega_{N/2})\} \end{aligned} \quad (22)$$

#### 4.2 周波数領域における応答処理

##### 4.2.1 応答波形のフーリエ変換成分

###### (1) $b_k \sin(\omega_k t)$ の応答波形

$b_k \sin(\omega_k t)$  に対するそれぞれの応答波形のフーリエ変換成分を  $S_s^P(\omega_k)$  とすると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_s^P(\omega) &= S_s(\omega) W(\omega) \\ &= i b_k S_{oi}^+(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &\quad + i b_k S_{oi}^-(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= S_s^{P+}(\omega_k) + S_s^{P-}(\omega_k) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $S_s^{P+}(\omega_k)$  と  $S_s^{P-}(\omega_k)$  は次式で表せる。

$$\begin{aligned} S_s^{P+}(\omega_k) &= i b_k S_{oi}^+(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= i b_k S_{oi}^+(\omega_k) |W(\omega)| [\cos\{\varphi(\omega)\} + i \sin\{\varphi(\omega)\}] \\ &= S_{sr}^{P+}(\omega_k) + i S_{si}^{P+}(\omega_k) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S_s^{P-}(\omega_k) &= i b_k S_{oi}^-(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= i b_k S_{oi}^-(\omega_k) |W(\omega)| [\cos\{\varphi(\omega)\} + i \sin\{\varphi(\omega)\}] \\ &= S_{sr}^{P-}(\omega_k) + i S_{si}^{P-}(\omega_k) \end{aligned} \quad (25)$$

なお、式(24)と式(25)において、次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_{sr}^{P+}(\omega_k) &= -b_k S_{oi}^+(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \sin\{\varphi(\omega)\} \\ S_{si}^{P+}(\omega_k) &= b_k S_{oi}^+(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \cos\{\varphi(\omega)\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} S_{sr}^{P-}(\omega_k) &= -b_k S_{oi}^-(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \sin\{\varphi(\omega)\} \\ S_{si}^{P-}(\omega_k) &= b_k S_{oi}^-(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \cos\{\varphi(\omega)\} \end{aligned} \quad (27)$$

式(23)にフーリエ逆変換を適用すると、応答波形  $s_s^P(t)$  が式(28)で表せる。

$$\begin{aligned} s_s^P(t) &= -i b_k |W(+\omega_k)| \left( -\frac{1}{2} \right) e^{+i(\omega_k t + \varphi(\omega_k))} \\ &\quad + i b_k |W(-\omega_k)| \left( +\frac{1}{2} \right) e^{-i(\omega_k t - \varphi(-\omega_k))} \end{aligned} \quad (28)$$

応答関数が式(29)を満たす場合、式(28)は式(30)で表せる。

$$\begin{aligned} |W(\omega_k)| &= |W(-\omega_k)|, \quad \varphi(\omega_k) = -\varphi(-\omega_k) \\ s_s^P(t) &= |W(+\omega_k)| b_k \sin\{\omega_k t + \varphi(\omega_k)\} \end{aligned} \quad (30)$$

式(30)は応答波形を表すことは明らかである。

したがって、応答波形のフーリエ変換から応答波を得るには、応答関数が式(29)を満たす必要がある。

###### (2) $a_k \cos(\omega_k t)$ の応答波形

$a_k \cos(\omega_k t)$  に対するそれぞれの応答波形のフーリエ変換成分を  $S_c^P(\omega_k)$  とすると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_c^P(\omega) &= S_c(\omega) W(\omega) \\ &= a_k S_{or}^+(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &\quad + a_k S_{or}^-(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= S_c^{P+}(\omega_k) + S_c^{P-}(\omega_k) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $S_c^{P+}(\omega_k)$  と  $S_c^{P-}(\omega_k)$  は次式で表せる。

$$\begin{aligned} S_c^{P+}(\omega_k) &= a_k S_{or}^+(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= a_k S_{or}^+(\omega_k) |W(\omega)| [\cos\{\varphi(\omega)\} + i \sin\{\varphi(\omega)\}] \\ &= S_{cr}^{P+}(\omega_k) + i S_{ci}^{P+}(\omega_k) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} S_c^{P-}(\omega_k) &= a_k S_{or}^-(\omega_k) |W(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ &= a_k S_{or}^-(\omega_k) |W(\omega)| [\cos\{\varphi(\omega)\} + i \sin\{\varphi(\omega)\}] \\ &= S_{cr}^{P-}(\omega_k) + i S_{ci}^{P-}(\omega_k) \end{aligned} \quad (33)$$

なお、式(32)と式(33)において、次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} S_{cr}^{P+}(\omega_k) &= a_k S_{or}^+(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \cos\{\varphi(\omega)\} \\ S_{ci}^{P+}(\omega_k) &= a_k S_{or}^+(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \sin\{\varphi(\omega)\} \\ S_{cr}^{P-}(\omega_k) &= a_k S_{or}^-(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \cos\{\varphi(\omega)\} \\ S_{ci}^{P-}(\omega_k) &= a_k S_{or}^-(\omega_k) \cdot |W(\omega)| \sin\{\varphi(\omega)\} \end{aligned} \quad (34)$$

式(31)にフーリエ逆変換を適用し、応答関数が式(29)を満たすと、応答波形  $s_c^P(t)$  は式(36)で表せる。

$$\begin{aligned} s_c^P(t) &= a_k |W(+\omega_k)| \cdot \left( +\frac{1}{2} \right) \cdot e^{+i(\omega_k t + \varphi(\omega_k))} \\ &\quad + a_k |W(-\omega_k)| \cdot \left( +\frac{1}{2} \right) \cdot e^{-i(\omega_k t - \varphi(-\omega_k))} \\ &= |W(\omega_k)| \cdot a_k \cos\{\omega_k t + \varphi(\omega_k)\} \end{aligned} \quad (36)$$

以上のことから、 $b_k \sin(\omega_k t)$  と  $a_k \cos(\omega_k t)$  のそれぞれの応答波形のフーリエ変換成分は、式(23)～式(27)と式(31)～式(35)で表せることがわかる。

##### 4.2.2 応答波形のFFT成分

###### (1) $b_k \sin(\omega_k t)$ の応答波形

$k=1, 2, \dots, N/2-1$  の場合、 $b_k \sin(\omega_k t_n)$  に対する応答波形のFFT成分の実数成分対を  $C_{sr}^P(k), C_{sr}^P(N-k)$ 、虚数成分対を  $C_{si}^P(k), C_{si}^P(N-k)$  で表し、式(17)を考慮すると、式(26)と式(27)から、式(37)が得られる。

式(37)の実数成分の間には、式(3)～式(5)の関係および応答関数が満たすべき条件式(29)を考慮すると、式(38)と式(39)が得られる。

$$\begin{aligned}
C_{sr}^P(k) &= -C_i(k) \cdot |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \\
C_{si}^P(k) &= C_i(k) \cdot |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \\
C_{sr}^P(N-k) &= -C_i(N-k) \cdot |W(-\omega_k)| \sin\{\varphi(-\omega_k)\} \\
C_{si}^P(N-k) &= C_i(N-k) \cdot |W(-\omega_k)| \cos\{\varphi(-\omega_k)\}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$C_{sr}^P(k) \cdot C_{sr}^P(N-k) > 0 \tag{38}$$

$$\{C_{sr}^P(k) + C_{sr}^P(N-k)\} / N = b_k |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \tag{39}$$

式(38)は実数成分が  $v_{sr}^P(t_n) = a_{sk}^P \cos(\omega_k t_n)$  を構成し、式(39)はその振幅  $a_{sk}^P$  を表している。

式(37)の虚数成分の間には、式(3)～式(5)の関係および応答関数が満たすべき条件式(29)を考慮すると、式(40)と式(41)が得られる。

$$C_{si}^P(k) \cdot C_{si}^P(N-k) < 0 \tag{40}$$

$$\{-C_{si}^P(k) + C_{si}^P(N-k)\} / N = b_k |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \tag{41}$$

式(40)は虚数成分が  $v_{si}^P(t_n) = b_{sk}^P \sin(\omega_k t_n)$  を構成し、式(41)はその振幅  $b_{sk}^P$  を表している。

したがって、式(37)で表されたFFT成分は、これらの合成波形  $v_s^P(t_n)$  を構成し、合成波形は式(42)で表せる。

$$\begin{aligned}
v_s^P(t_n) &= v_{sr}^P(t_n) + v_{si}^P(t_n) \\
&= b_k |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \cos(\omega_k t_n) \\
&\quad + b_k |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \sin(\omega_k t_n) \\
&= |W(\omega_k)| \cdot b_k \sin\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\}
\end{aligned} \tag{42}$$

式(42)は  $b_k \sin(\omega_k t_n)$  が応答関数の影響を受けて、振幅および位相の影響を受けていることを表している。このことから、式(37)で表されたFFT成分は  $b_k \sin(\omega_k t_n)$  の応答波形のFFT成分であることがわかる。

なお、実数成分  $C_{sr}^P(N/2)$  と虚数成分  $C_{si}^P(N/2)$  は式(37)を考慮すると、 $C_i(N/2)$  に関連する成分であるので、次式が成り立つ。

$$C_{si}^P(N/2) = C_{sr}^P(N/2) = 0 \tag{43}$$

(2)  $a_k \cos(\omega_k t)$  の応答波形

$k=1, 2, \dots, N/2-1$  の場合、 $a_k \cos(\omega_k t)$  に対する応答波形のFFT成分の実数成分対を  $C_{sr}^P(k), C_{sr}^P(N-k)$ 、虚数成分対を  $C_{si}^P(k), C_{si}^P(N-k)$  で表し、式(18)を考慮すると、式(34)と式(35)から、式(44)が得られる。

$$\begin{aligned}
C_{sr}^P(k) &= C_r(k) \cdot |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \\
C_{si}^P(k) &= C_r(k) \cdot |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \\
C_{sr}^P(N-k) &= C_r(N-k) \cdot |W(-\omega_k)| \cos\{\varphi(-\omega_k)\} \\
C_{si}^P(N-k) &= C_r(N-k) \cdot |W(-\omega_k)| \sin\{\varphi(-\omega_k)\}
\end{aligned} \tag{44}$$

式(44)の実数成分の間には、式(3)～式(5)の関係および応答関数が満たすべき条件式(29)を考慮すると、

$$C_{sr}^P(k) \cdot C_{sr}^P(N-k) > 0 \tag{45}$$

$$\{C_{sr}^P(k) + C_{sr}^P(N-k)\} / N = a_k |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \tag{46}$$

式(45)は実数成分が  $v_{cr}^P(t) = a_{ck}^P \cos(\omega_k t_n)$  を構成し、式(46)はその振幅  $a_{ck}^P$  を表している。

式(44)の虚数成分の間には、式(3)～式(5)の関係および応答関数が満たすべき条件式(29)を考慮すると、

$$C_{si}^P(k) \cdot C_{si}^P(N-k) < 0 \tag{47}$$

$$\{-C_{si}^P(k) + C_{si}^P(N-k)\} / N = -a_k |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \tag{48}$$

式(47)は虚数成分が  $v_{ci}^P(t) = b_{ck}^P \sin(\omega_k t_n)$  を構成し、式(48)はその振幅  $b_{ck}^P$  を表している。

したがって、式(44)で表されたFFT成分は、これらの合成波形  $v_c^P(t_n)$  を構成し、式(49)で表せる。

$$\begin{aligned}
v_c^P(t_n) &= v_{cr}^P(t_n) + v_{ci}^P(t_n) \\
&= a_k |W(\omega_k)| \cos\{\varphi(\omega_k)\} \cos(\omega_k t_n) \\
&\quad - a_k |W(\omega_k)| \sin\{\varphi(\omega_k)\} \sin(\omega_k t_n) \\
&= |W(\omega_k)| a_k \cos\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\}
\end{aligned} \tag{49}$$

式(49)は  $a_k \cos(\omega_k t_n)$  が応答関数の影響を受けて、振幅および位相の影響を受けていることを表している。このことから、式(44)で表されたFFT成分は  $a_k \cos(\omega_k t_n)$  の応答波形のFFT成分であることがわかる。

なお、実数成分  $C_{cr}^P(N/2)$  と虚数成分  $C_{ci}^P(N/2)$  は式(44)を考慮すると、 $C_r(N/2)$  に関連する成分であるが、虚数成分  $C_{ci}^P(N/2)$  はFFTの特徴から成分として存在しないので、次式が成り立つ。

$$C_{ci}^P(N/2) = C_r(N/2) \cdot |W(\omega_{N/2})| \cos\{\varphi(\omega_{N/2})\} \tag{50}$$

この成分は、 $a_{cN/2}^P \cos(\omega_{N/2} t_n)$  を構成し、振幅  $a_{cN/2}^P(N/2)$  は次式で表せる。

$$a_{cr}^P(N/2) = C_r(N/2) / N \tag{51}$$

(3) 一般波形の応答波形

一般波形は多くの  $b_k \sin(\omega_k t_n)$ 、 $a_k \cos(\omega_k t_n)$  と  $a_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t_n)$  の合成波であるので、一般波形の応答波形は、多くの  $b_k \sin(\omega_k t_n)$  の応答波形と多くの  $a_k \cos(\omega_k t_n)$  の応答波形および  $a_{N/2} \cos(\omega_{N/2} t_n)$  の合成波となる。

したがって、一般波形の応答波形のFFT成分は式(37)と式(44)で構成されていることになる。

#### 4.2.3 表現式

前項から、応答波形の標本値は次式で表現される。

$$\begin{aligned}
v_r^P(t_n) &= a_0 |W(\omega_0)| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| b_k \sin\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N/2-1} |W(\omega_k)| a_k \cos\{\omega_k t_n + \varphi(\omega_k)\} \\
&\quad + |W(\omega_{N/2})| a_{N/2} \cos\{\varphi(\omega_{N/2})\} \cos(\omega_{N/2} t_n)
\end{aligned} \tag{52}$$

#### 4.2.3 両領域における表現式の比較

式(22)と式(52)は、同一のFFT成分を用いて得られた式であるが、式(22)と式(52)のそれぞれの第四項が異なっている。この原因は、FFTでは、 $N/2$ 番目の虚数成分が存在しないために、周波数領域における処理過程で、この成分が関与して導出される実数成分が消失してしまい、この領域における表現式が式(22)と異なる式となるがである。

一般的に、FFTで扱う最大角周波数  $\omega_{N/2}$  のFFT成分は他の角周波数のFFT成分に比べて、無視し得る程度の小さな値であるので、実質的には、両者は同一の結果を提供するといえる。

この差が気になるような場合には、計測時に、予め、最大角周波数  $\omega_{N/2}$  のFFT成分が混入しないように波形をフィルタ処理しておけば、両者の結果は一致することになるので、適用対象によって、どちらの領域の処理を適用するかを判断すればよい。

#### 5. むすび

FFT成分のうち、最大角周波数  $\omega_{N/2}$  のFFT成分は、時間領域における応答処理過程で、影響を受けることなく、応答波形の構成成分として生き残るが、一方、周波数領域における応答処理過程で、虚数成分が消失し、不完全な構成成分が生成されている。通常、最大角周波数  $\omega_{N/2}$  のFFT成分が他のFFT成分よりも、無視し得るほど小さいので、両領域で得られる応答波形のそれぞれの表現式、は実質的に一致すると言える。

#### 参考文献

- (1) ”特集 フーリエ解析”，数理科学，Vol.10，2007.
- (2) 佐川雅彦，貴家仁志，”高速フーリエ変換とその応用”，昭晃堂，1993.
- (3) 日野幹雄，”スペクトル解析”，朝倉書店，1990.
- (4) 東 恒人，島田恭宏，”FFT成分を用いた波形の定式化”，信学論(A)，J91-A，5，pp.582-586，2008.

# Expression of output wave of system with FFT components

Jun ASATANI, Tsunehito HIGASHI and Yasuhiro SHIMADA

*Department of Information and Computer Engineering,  
Faculty of Engineering,  
Okayama University of Science,  
1-1 Ridai-cho, Kita-ku, Okayama 700-0005, Japan*

(Received September 15, 2010; accepted November 9, 2010)

FFT components are most often used for calculating power spectra. However, there is no simple method of calculating output waveforms of system using FFT components.

In this paper, two different expressions of such waveforms are derived, one is derived in the time domain and the other is derived in the frequency domain.

The FFT component corresponding to the maximum frequency is used to express waveform in the time domain, whereas such a component is used to express differently waveform in the frequency domain.

However, any quantitative differences between the two expressions can be ignored.

**Keyword :** FFT components ; Output waveform ; Time domain ; Frequency domain