

有理関数近似による Blow-up 時間計算法

榊原道夫・立石公義*

岡山理科大学総合情報学部数理情報学科

*岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻

(1997年10月6日 受理)

1. はじめに

一般に、微分方程式の初期値問題の解が有限時間で Blow-up する場合、ルンゲ・クッタ法などの数値解法により得られる近似解から Blow-up 時間を求めることは困難である。そこで、我々は Blow-up する解から Blow-up 時間を近似計算するためのアルゴリズムを提案する⁴⁾。ただし、Blow-up とは解がある有限な点で無限に発散することである。また、無限に発散するある有限な点を Blow-up 時間と呼ぶ。最初に、与えられた初期値問題の近似解を代数的ニュートン法により打ち切りべき級数として与える^{1),2)}。次に、与えられた打ち切りべき級数をパデ近似³⁾により有理関数に近似する。最後に、与えられた有理関数の分母の多項式について零点を近似計算する。本論文は計算した零点が Blow-up 時間となることを数値実験により確認する。

2. 代数的ニュートン法

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

の近似解をべき級数として与える代数的ニュートン法を示す。ここで、 $f(t, y)$ は t, y についての多項式とする。また、 $y(t_0) = y_0$ は初期値とする。まず、(2.1) を

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{dy}{dt} - f(t, y) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

と置く。もし、 $F(y)$ が y に関して微分可能ならば、 $F(y)$ に対するフレシェ微分 F' は

$$F' = \frac{d}{dt} f'(t, \cdot) \quad (2.3)$$

となる。ただし、 $f'(t, y)$ は

$$f'(t, y) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \quad (2.4)$$

と定義する。ここで、反復の初期関数を $y^{(0)} = y^{(0)}(t)$ として、問題 (2.1) の解を得るためにニュートン法を適用して

$$y^{(m+1)} - y^{(m)} = -(F'(y^{(m)}))^{-1} F(y^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

となり、式 (2.5) を

$$F'(y^{(m)})(y^{(m+1)} - y^{(m)}) = -F(y^{(m)}) \quad (2.6)$$

とする。ここで、

$$\begin{cases} u^{(m)}(t) = y^{(m+1)} - y^{(m)} \\ a^{(m)}(t) = -f'(t, y^{(m)}) \\ v^{(m)}(t) = -F(y^{(m)}) \end{cases} \quad (2.7)$$

と定義すると、式 (2.6) は

$$\frac{du^{(m)}}{dt} + a^{(m)}u^{(m)} = v^{(m)} \quad (2.8)$$

と置き換えることができる。ただし、初期条件は $u^{(m)}(0) = 0$ となる。このとき、式 (2.8) の解は

$$u^{(m)}(t) = e^{-A^{(m)}(t)} \int_0^t e^{A^{(m)}(s)} v^{(m)}(s) ds \quad (2.9)$$

となる、ここで

$$A^{(m)}(t) = \int_0^t a^{(m)}(s) ds \quad (2.11)$$

とする。(2.7) および、式 (2.9) より反復式

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + e^{-A^{(m)}(t)} \int_0^t e^{A^{(m)}(s)} v^{(m)}(s) ds \quad (2.12)$$

が得られる。次に、式 (2.12) を用いて近似解を計算するために反復の各段階において打ち切りべき級数で近似解を与える問題について考察する。

いま、体 K 上において、べき級数環を $K[t]$ とする。また、 n を非負の整数とし、 $p(t)$ をべき級数とする。これから、打ち切りべき級数環を

$$K[t]_n = \{p(t) \in K[t] \bmod t^n\} \quad (2.13)$$

と定義する。ここで、べき級数を第 n 項で打ち切った打ち切りべき級数を

$$T_n[p(t)] = p(t) \bmod t^n \quad (2.14)$$

と定義する。つまり

$$T_n[p(t)] \in K[t]_n \quad (2.15)$$

である。ここで、 $K[t]_n$ 上での演算は、べき級数 $a(t), b(t) \in K[t]$ において

$$\begin{cases} a(t) \oplus b(t) = T_n[a(t) + b(t)] \\ \quad \quad \quad = T_n[a(t)] + T_n[b(t)] \\ a(t) \odot b(t) = T_n[T_n[a(t)] \cdot T_n[b(t)]] \end{cases} \quad (2.16)$$

とする。ただし、右辺の演算 $+$, \cdot は多項式の演算である。これより、式 (2.12) を打ち切りべき級数で表すと

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + T_n \left[T_n \left[e^{-A^{(m)}(t)} \right] \cdot T_n \left[\int_0^t e^{A^{(m)}(s)} v^{(m)}(s) ds \right] \right] \quad (2.17)$$

となる。ただし、べき級数を打ち切る次数 n はニュートン法の 2 次収束性を利用して

$$n = 2^m \quad (2.18)$$

とする。また、指数関数のべき級数はテーラー展開により与える。ここで与えられた打ち切りべき級数を反復の初期関数として反復をおこなう方法を代数的ニュートン法と呼ぶ。

3. パデ近似

代数的ニュートン法により与えられた打ち切りべき級数からパデ近似により有理関数を与える方法について述べる。パデ近似は 2 つの多項式

$$U_{\mu,\nu}(t) = \alpha_{\mu,0} + \alpha_{\mu,1}t + \cdots + \alpha_{\mu,\nu}t^\nu \quad (3.1)$$

$$V_{\mu,\nu}(t) = \beta_{0,\nu} + \beta_{1,\nu}t + \cdots + \beta_{\mu,\nu}t^\mu \quad (3.2)$$

によって

$$y(t) = \frac{U_{\mu,\nu}(t)}{V_{\mu,\nu}(t)} + O(\mu + \nu + 1) \quad (3.3)$$

により与える有理関数で、 $y(t)$ を $n = \mu + \nu + 1$ のオーダーで近似すると定義した有理関数を与える近似である。本論文において実験では $\mu = \nu$ と考える。また、式(2.17)の代数的ニュートン法により得られた打ち切りベキ級数 $y^{(m+1)}$ に対するパデ近似を

$$Pa[y^{(m+1)}] \quad (3.4)$$

と表わすことにする。また、パデ近似の定義より線形方程式

$$\begin{aligned} c_0\beta_{0,\nu} &= \alpha_{\mu,0} \\ c_1\beta_{0,\nu} + c_0\beta_{1,\nu} &= \alpha_{\mu,1} \\ &\dots\dots\dots \\ c_\nu\beta_{0,\nu} + c_{\nu-1}\beta_{1,\nu} + \cdots + c_{\nu-\mu}\beta_{\mu,\nu} &= \alpha_{\mu,\nu} \\ c_{\nu+1}\beta_{0,\nu} + c_\nu\beta_{1,\nu} + \cdots + c_{\nu-\mu+1}\beta_{\mu,\nu} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ c_{\nu+\mu}\beta_{0,\nu} + c_{\nu+\mu-1}\beta_{1,\nu} + \cdots + c_\nu\beta_{\mu,\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

を導くことができ、 $\beta_{0,\nu} = 1$ とすれば線形方程式(3.5)は解くことができる。

次に、パデ近似により与えられた有理関数の分母の多項式について零点を近似計算する。計算した零点が Blow-up 時間であることを数値実験により確認する。

4. 計算例

提案したアルゴリズムで実験をおこなった計算例を示す。

例題 1 : 1 階常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

を考察する。代数的ニュートン法により打ち切りベキ級数は

$$\begin{aligned}
y^{(1)} &= t \\
y^{(2)} &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 \\
y^{(3)} &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \frac{21844}{6081075}t^{13} \\
y^{(4)} &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \frac{21844}{6081075}t^{13} + \frac{929569}{638512875}t^{15} \\
&\quad + \frac{6404582}{10854718875}t^{17} + \frac{443861162}{1856156927625}t^{19} + \frac{18888466084}{194896477400625}t^{21} \\
&\quad + \frac{113927491862}{2900518163668125}t^{23} + \frac{58870668456604}{3698160658676859375}t^{25} \\
&\quad + \frac{8374643517010684}{1298054391195577640625}t^{27} + \frac{689005380505609448}{263505041412702261046875}t^{29} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

となる。問題 (4. 1) に対する真の解は $y = \tan t$ であり、テーラー展開は

$$y = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \frac{21844}{6081075}t^{13} + \dots \quad (4. 2)$$

である。次に、代数的ニュートン法により計算した $y^{(2)}$, $y^{(3)}$ および $y^{(4)}$ に対するパデ近似 $Pa[y^{(2)}]$, $Pa[y^{(3)}]$ および $Pa[y^{(4)}]$ は

$$Pa[y^{(2)}] = \frac{t}{1 - \frac{1}{3}t^2}$$

$$Pa[y^{(3)}] = \frac{t - \frac{4}{33}t^3 + \frac{1}{495}t^5}{1 - \frac{5}{11}t^2 + \frac{2}{99}t^4 - \frac{1}{10395}t^6}$$

$$Pa[y^{(4)}]$$

$$= \frac{t - \frac{4}{27}t^3 + \frac{11}{2025}t^5 - \frac{8}{108675}t^7 + \frac{2}{4890375}t^9 - \frac{8}{9198795375}t^{11} + \frac{1}{2032933777875}t^{13}}{1 - \frac{13}{27}t^2 + \frac{22}{675}t^4 - \frac{11}{15525}t^6 + \frac{2}{326025}t^8 - \frac{2}{92917125}t^{10} + \frac{4}{156379521375}t^{12} - \frac{1}{213458046676875}t^{14}}$$

となる。ここで、 $Pa[y^{(2)}]$ と $Pa[y^{(3)}]$ に対し真の解と比較したグラフを図 1, 2 に示す。破線が $\tan t$ のグラフである。

図 2 からでは比較が困難であるため、次に $Pa[y^{(m)}]$ の分母の多項式について零点の近似

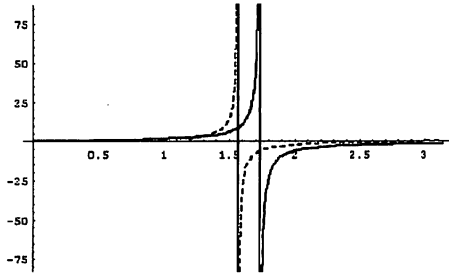
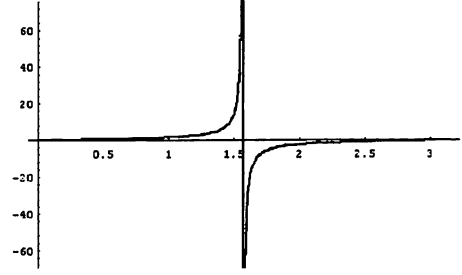
図1 $Pa[y^{(2)}$] に対する真の解との比較グラフ図2 $Pa[y^{(3)}$] に対する真の解との比較グラフ

表1 零点の近似値と真値との相対誤差

	零点の近似値	真値との相対誤差
$Pa[y^{(2)}$]	1.732050807568877	0.1026577908435841
$Pa[y^{(3)}$]	1.570796534156882	$0.1320107400591992 \times 10^{-6}$
$Pa[y^{(4)}$]	1.570796326794897	$0.141357985842823 \times 10^{-15}$

値と真値 ($\pi/2$) との相対誤差を表1に示す。計算結果は Maple V Release 4 で実行したものである。表1より、代数的ニュートン法の反復回数を増やせば相対誤差が非常に小さくなる。また、分母の多項式の零点を近似計算した値が Blow-up 時間であることが数値実験により確認できる。

例題2：1階常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = e^y \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

を考察する。ここで、 e^y に対するテーラー展開

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 + \cdots + \frac{1}{n!}y^n + \cdots \quad (4.4)$$

の n 次の打ち切りべき級数を用いて問題を置き換える。つまり

$$\begin{cases} y' = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

とする。問題(4.5)について Blow-up 時間を近似計算した表2を示す。

次に、打ち切りの次数を1次あげて

$$\begin{cases} y' = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

とする。問題 (4.6) について Blow-up 時間を近似計算した表 3 を示す。

また、さらに打ち切りの次数を 1 次あげて

$$\begin{cases} y' = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

とする。問題 (4.7) について Blow-up 時間を近似計算した表 4 を示す。

ここで、Maple に含まれているライブラリ DEtools 中のグラフを表示する関数 DEplot を用いて問題 (4.3), (4.5), (4.6), (4.7) のグラフを示す。図 3, 4, 5, 6 より打ち切りの次数を上げることで元々の問題 (4.3) のグラフへ近づいているのがわかる。

5. ルンゲ・クッタ法との比較

ここでは、例題 1 の結果とルンゲ・クッタ法を用いた場合の結果との比較を示す。ここで、Maple には微分方程式を数値的に解くために関数 dsolve がある。dsolve はオプションとして幾つかの数値計算法を用意している。その中でルンゲ・クッタ法を用いて問題 (4.

表 2 代数的ニュートン法の反復回数と Blow-up 時間

反復回数	Blow-up 時間
2	1.582575695
3	1.570796327
4	1.570796327

表 3 代数的ニュートン法の反復回数と Blow-up 時間

反復回数	Blow-up 時間
2	1.267949192
3	1.186071398
4	1.168060724
5	1.164427359
6	1.164175751

表 4 代数的ニュートン法の反復回数と Blow-up 時間

反復回数	Blow-up 時間
2	1.267949192
3	1.092366353
4	1.067601823
5	1.063142319
6	1.062802956

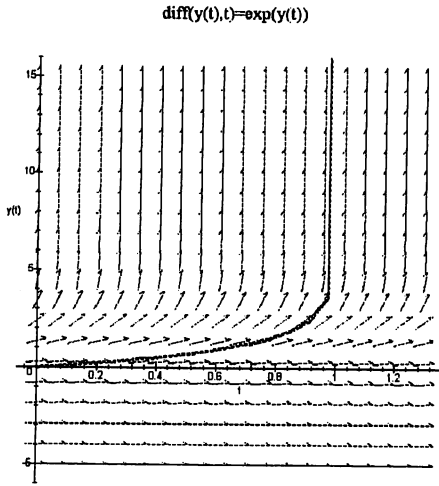


図 3 問題 (4.3) のグラフ

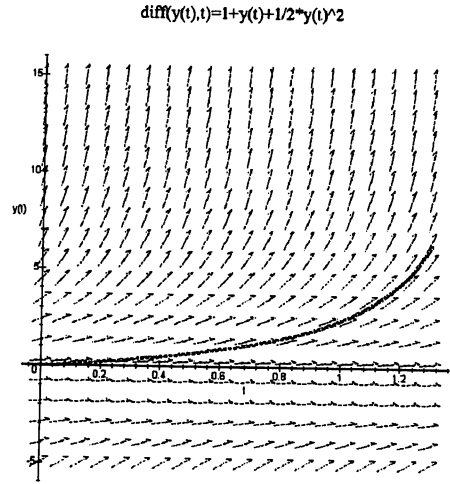


図 4 問題 (4.5) のグラフ

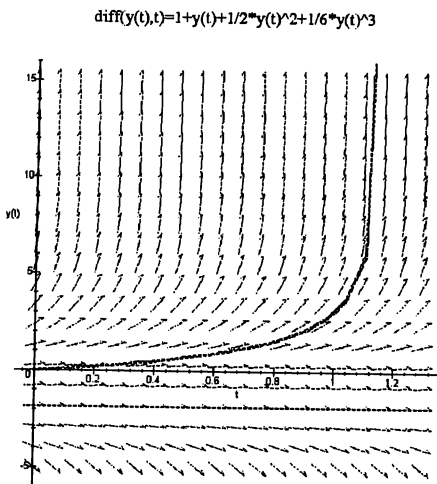


図 5 問題 (4.6) のグラフ

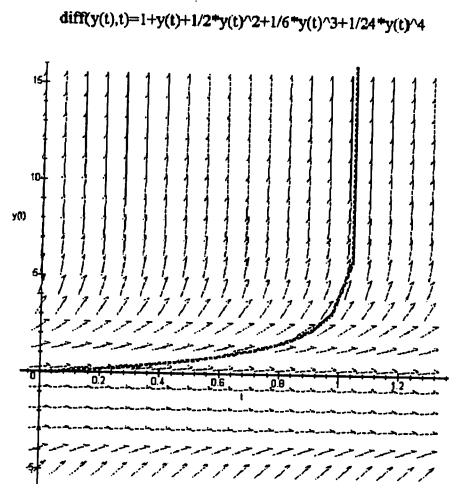


図 6 問題 (4.7) のグラフ

1) を解いた結果を示す。

ルンゲ・クッタ法による数値計算において刻み幅 Δt を $\Delta t = 0.01$ としたとき

$$y(0) = 0$$

}

$$y(1.56) = 92.62049631347597$$

まで計算したが $y(1.57)$ ではエラーがでた。また、 $\Delta t = 0.001$ のときは

$$y(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y(1.569) = 0.1162990479203389 \times 10^{27}$$

まで計算したが $y(1.570)$ ではエラーが表われ計算ができなかった。次に $\Delta t = 0.0001$ のときは

$$y(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y(1.5669) = 256.6506846471206$$

まで計算したが $y(1.5670)$ ではエラーがでた。つまり、精度をあげるために刻み幅を小さくしてもルンゲ・クッタ法では計算量が増加し Blow-up 時間を求めることは困難である。

6. 結 論

微分方程式の初期値問題において解が有限時間で Blow-up する場合について Blow-up 時間を近似計算する方法を提案した。数値実験により提案した方法は Blow-up 時間を求めるのに有効であることがわかった。

参 考 文 献

- 1) L. B. Rall : Computational Solution of Nonlinear Operator Equations, John Wiley & Sons, Inc. 1969.
- 2) J. D. Lipson : Elements of Algebra and Algebraic Computing, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1981.
- 3) R. P. Brent and H. T. Kung : Fast Algorithms for Manipulating Formal Power Series. Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 25, No. 4, October 1978, pp.581-595.
- 4) M. Sakakihara and M. Tateishi : Semi-numerical Approximation of Blow-up Time for Initial Value Problems, Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science, Vol. 2, No. 2, E-9-4, 1997, pp.725-726.

Blow-up Time Approximation for Initial Value Problems with Rational Functions

Michio SAKAKIHARA and Masayoshi TATEISHI*

Department of Mathematical Information Science,

Faculty of Informatics,

**Graduate School of Science,*

Okayama University of Science

Ridai-cho 1-1, Okayama 700-0005, Japan

(Received October 6, 1997)

The aim of this paper is to propose a method of constructing a rational approximant for a initial value problem of an ordinary differential equations system whose solutions become the blow-up at a finite time which is called the blow-up time. It is difficult to seek the time accurately with some numerical integration method for the initial value problems as Runge-Kutta method. Since the iterations which are generated by those methods are terminated when an overflow occurs, we do not have any testing method how the time is an approximate solution for the blow-up time. The proposed method can avoid such difficulty by a use of rational approximation technique. We formulate the approximation method with the symbolic Newton method for generating a truncated power series and Pade approximation. Some examples are illustrated to show validity of the method.