

柔物体の切断シミュレーション

掛札 敏計・島田 英之・塩野 充・宮垣 嘉也

岡山理科大学情報工学科

(1996年10月7日 受理)

1. まえがき

切断という現象の表現は、意外に研究されていない分野のひとつであり、切断の表現方法の文献や論文は非常に少ないのが現状である。また材料力学など切断を扱う別の分野でも、理論的な記述はあるが、切断をシミュレートできるほどに実際的な方法が確立されているわけではない。

本研究では、物体の切断をシミュレートすることで物体のリアルな質感の表現をめざす。例えば、“やわらかさ”という質感を考えてみても豆腐の“やわらかさ”と、こんにゃくの“やわらかさ”は違っている。このように言葉では表現しにくい質感も、切断の様子を説明することによって簡単にあらわすことができる。

本研究では、切断という非常に複雑なプロセスを、幾つかの簡単な段階に分割してシミュレートしていく。今回の研究では、物理現象を忠実に表現できるほどの完全なモデル化はできないが、この研究が進んで完全なモデル化が実現できれば、切断を行ういろいろな分野への応用（切れにくい合板の開発、仮想空間でのリアルな作業の実現など）が可能であると考えられる。

2. 切断現象

切断を次のような3段階の現象とみなす。

変形 物体が刃物の押す力によって変形する。変形には2種類ある。ゼリーやこんにゃくのような弾性変形¹⁾(力を取り除くと元の形状に復元する)と、粘土のような塑性変形¹⁾(力を取り除いても元の形状に復元しない)である。今回は弾性変形だけを考える。

降伏²⁾ 現在の状態で切断すべきかどうかを判定する。

分割 物体に切れ目をいれていくと同時に変形を戻していく。

3. 方 法

3.1 変 形

変形には、有限要素法¹⁾³⁾⁴⁾⁵⁾という手法を使用する。有限要素法とは、工学的な近似を使

い単純なマトリックス演算だけで物理現象を解析する手法であり、建物や飛行機的设计などに使われている。

- (1) 切断対象を要素 (20個の節点をもつ6面体, 図1参照) で構成し, パラメータ (節点の座標, 外力, ヤング率¹⁾, ポアソン比¹⁾, 固定節点番号) を入力する。
- (2) 要素ごとに変形 (節点の変位) を求める。
- (3) 要素の変形を統合することで全体の変形を求める。

節点の補間には, アイソパラメトリック法⁴⁾(形状と変位の補間を同じ補間関数を用いる) を使用する。要素の曲線上のある点の座標 (x, y, z) と, 変位 (u, v, w) を補間関数 N_0, N_1, \dots, N_{19} (物体の形状で値と個数が決まる) を使ってあらわすと次のようになる。

$$\begin{cases} x = N_0x_0 + N_1x_1 + \dots + N_{19}x_{19} \\ y = N_0y_0 + N_1y_1 + \dots + N_{19}y_{19} \\ z = N_0z_0 + N_1z_1 + \dots + N_{19}z_{19} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u = N_0u_0 + N_1u_1 + \dots + N_{19}u_{19} \\ v = N_0v_0 + N_1v_1 + \dots + N_{19}v_{19} \\ w = N_0w_0 + N_1w_1 + \dots + N_{19}w_{19} \end{cases} \quad (2)$$

有限要素法の原理は次の式であらわされる。

$$\text{外力のする仕事} = [\text{変位}]^T [\text{外力}] \quad (3)$$

$$\text{たまるエネルギー} = \int [\text{ひずみ}]^T [\text{応力}] dV \quad (V \text{ は体積}) \quad (4)$$

1要素の節点の座標, 変位, 外力はそれぞれ 1×20 のマトリックスで以下のようにあらわされる。

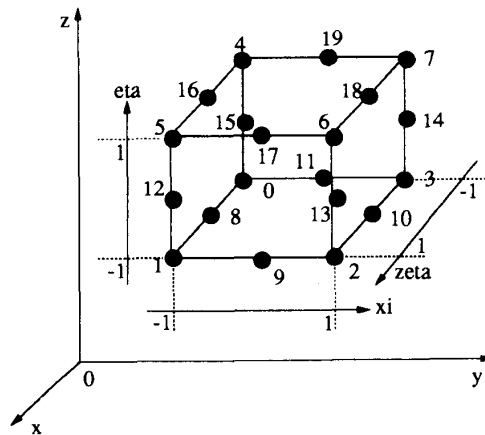


図1 要素の単位

$$\begin{aligned}
 [\text{座標}] = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ x_{19} \\ y_{19} \\ z_{19} \end{pmatrix} \quad [\text{変位}] = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ u_{19} \\ v_{19} \\ z_{19} \end{pmatrix} \quad [\text{外力}] = \begin{pmatrix} fx_0 \\ fy_0 \\ fz_0 \\ \vdots \\ fx_{19} \\ fy_{19} \\ fz_{19} \end{pmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

また、1要素のひずみ、応力マトリックスは弾性ひずみ¹⁾ $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 剪断ひずみ¹⁾ $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 弾性応力¹⁾ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 剪断応力¹⁾ $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ をつかって次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned}
 [\text{ひずみ}] = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix} = [\text{形状特性}] [\text{変位}] \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{応力}] = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = [\text{材料特性}] [\text{ひずみ}] \quad (7)
 \end{aligned}$$

形状特性と材料特性は

$$\begin{aligned}
 [\text{形状特性}] = \begin{pmatrix} J^{-1}H_{1,1} & 0 & 0 & \dots & J^{-1}H_{1,20} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1}H_{2,1} & 0 & \dots & 0 & J^{-1}H_{2,20} & 0 \\ 0 & 0 & J^{-1}H_{3,1} & \dots & 0 & 0 & J^{-1}H_{3,20} \\ J^{-1}H_{2,1} & J^{-1}H_{1,1} & 0 & \dots & J^{-1}H_{2,20} & J^{-1}H_{1,20} & 0 \\ 0 & J^{-1}H_{3,1} & J^{-1}H_{2,1} & \dots & 0 & J^{-1}H_{3,20} & J^{-1}H_{2,20} \\ J^{-1}H_{3,1} & 0 & J^{-1}H_{1,1} & \dots & J^{-1}H_{3,20} & 0 & J^{-1}H_{1,20} \end{pmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$[H] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_{19}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_0}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_{19}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_0}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_{19}}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$[J^{-1}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (10)$$

ヤング率を E ，ポアソン比を ν とすると

$$[\text{材料特性}] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

という対称行列になる。式(3)，(4)から

$$[\text{変位}]^T [\text{外力}] = \int [\text{ひずみ}]^T [\text{応力}] dV \quad (12)$$

式(6)，(7)から

$$[\text{変位}]^T [\text{外力}] = \int [\text{変位}]^T [\text{形状特性}]^T [\text{材料特性}] [\text{形状特性}] [\text{変位}] dV \quad (13)$$

$[\text{変位}]$ ， $[\text{変位}]^T$ は積分と関係がないので

$$[\text{変位}]^T [\text{外力}] = [\text{変位}]^T \int [\text{形状特性}]^T [\text{材料特性}] [\text{形状特性}] dV [\text{変位}] \quad (14)$$

よって

$$[\text{外力}] = \int [\text{形状特性}]^T [\text{材料}] [\text{形状特性}] dV [\text{変位}] \quad (15)$$

積分はガウスの3点積分⁶⁷⁾を使うと以下になる。

$$[\text{外力}] = \sum_{n=1}^3 ([\text{形状特性}]^T [\text{材料}] [\text{形状特性}]) [\text{変位}] \quad (16)$$

この連立方程式を解けば（前進消去法⁶⁷⁾，後退代入法⁶⁷⁾を使う）1要素の変形量が求まる。あとは，それぞれの要素の変形を統合していけば全体の変形が求まる。

3.2 降 伏

切断力が切断に必要な力より大きいときだけ切断を行い，それ以外は切断を行わない。切断力の大きさは剪断応力が関係し，次式で表される。

$$\text{切断力} = \text{物体の剪断応力} \quad (17)$$

切断に必要な力は剪断限界応力²⁾と刃物の切れ味が関係し，次式で表される。

$$\text{切断に必要な力} = \text{剪断限界応力} \times (1.0 - \text{刃物の切れ味}) \quad (18)$$

ここで，刃物の切れ味のパラメータの設定は独自に行った。刃物の切れ味は0.0から1.0までの値をとる。値が大きいほど切れ味が良く1.0のときは切断力を全く必要とせずに，0.0のときは剪断限界応力より大きい切断力を必要とする。

3.3 切 断

切断面の節点を除々に分割する。切断後はそれぞれ別の物体として管理する。

- (1) 分割に必要なデータを得る。

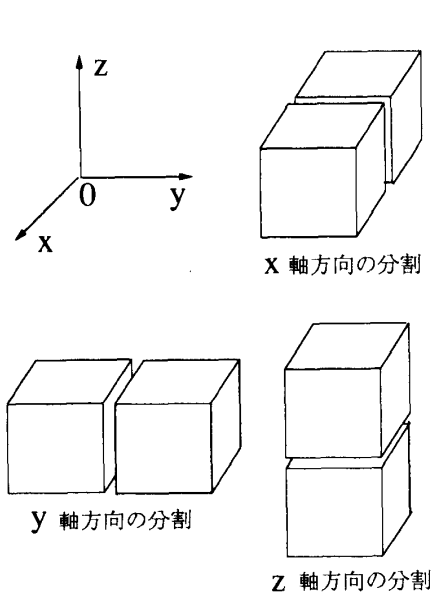


図2 分類の種類

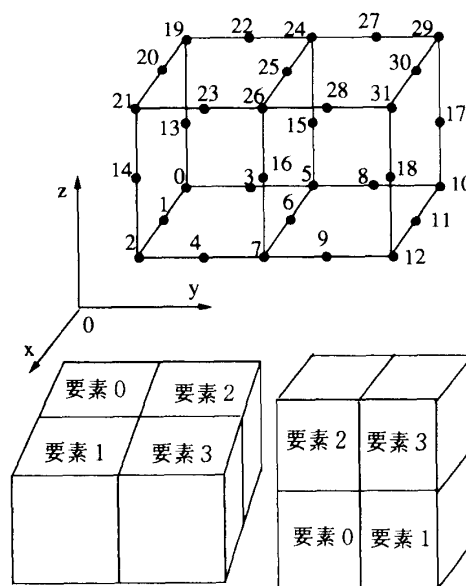


図3 番号の付け方

(2) 節点を分割しながら、外力が加わる節点を変えて有限要素法を適用し、変形を求めていく。

(3) 切断が完了したら、分割した要素を別々の物体とする。

ステップ1

必要なパラメータは

- n_x, n_y, n_z : 物体の各軸方向の要素数
- x, y, z : どの軸方向で分割するか
- dn : 何番目 (要素の境界を切断面とする) で分割するか

である。分割方向は図2参照。

物体を要素に分割する際に、節点番号と要素番号の付け方に一定の規則を定めておく(図3を参照)。本研究では番号を x 軸, y 軸, z 軸方向の順でつけていく。

このことにより、与えられたパラメータから切断面の節点と要素を求めることができる。 i, j をプログラムのループ変数 (負でない整数) として、以下に各軸方向の分割について説明する。

x 方向での分割

$$6 \text{ 切断面の要素番号} = n_x \cdot n_y \cdot i + n_x \cdot j + dn \quad (0 \leq i < n_z, 0 \leq j < n_y) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{節点番号 (} i \text{ が奇数)} &= \{(2n_x + 1)(n_y + 1) + (n_x + 1)n_y\}i \\ &+ (n_x + 1)(n_y + 1)(i - 1) + (n_x + 1)j + dn \quad (20) \\ &(1 \leq i < n_z, 0 \leq j < n_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節点番号 (} i \text{ が偶数, } j \text{ が奇数)} &= \{(2n_x + 1)(n_y + 1) + (n_x + 1)n_y\}i \\ &+ (n_x + 1)(n_y + 1)(i - 1) \\ &+ (2n_x + 1)j + (n_x + 1)(j - 1) \quad (21) \\ &+ dn \\ &(0 \leq i < n_z, 1 \leq j < n_y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節点番号 (} i, j \text{ が偶数)} &= \{(2n_x + 1)(n_y + 1) + (n_x + 1)n_y\}i \\ &+ (n_x + 1)(n_y + 1)i + (2n_x + 1)j \\ &+ (n_x + 1)j + 2dn \quad (22) \\ &(0 \leq i < n_z, 0 \leq j < n_y) \end{aligned}$$

y 方向での分割

$$\text{切断面の要素番号} = n_x \cdot n_y \cdot i + n_x \cdot dn + j \quad (0 \leq i < n_z, 0 \leq j < n_x) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{節点番号 (} i \text{ が奇数)} &= \{(2n_x + 1)(n_y + 1) + (n_x + 1)n_y\}i \\ &+ (n_x + 1)(n_y + 1)(i - 1) + (n_x + 1)dn + j \quad (24) \end{aligned}$$

$$(1 \leq i < nz, 0 \leq j < nx)$$

$$\begin{aligned} \text{節点番号 (} i \text{ が偶数)} &= \{(2nx+1)(ny+1) + (nx+1)ny\}i + (nx+1)(ny+1)i \\ &+ (2nx+1)dn + (nx+1)dn + j \\ &(0 \leq i < nz, 0 \leq j < 2nx) \end{aligned} \quad (25)$$

z 方向での分割

$$\text{切断面の要素番号} = nx \cdot ny \cdot dn + i \quad (0 \leq i < nx \cdot ny) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{切断面の節点番号} &= \{(2nx+1)(ny+1) + (nx+1)ny\}dn \\ &+ (nx+1)(ny+1)dn + i \\ &(0 \leq i < (2nx+1)(ny+1) + (nx+1)ny) \end{aligned} \quad (27)$$

3.3.1 ステップ2

切断面の節点を徐々に2つに分割していく。分割された節点に加わっていた刃物による外力は、次に分割する節点に移す。そして分割を進めていきながら、有限要素法によって変形を戻していく。

分割の際には、新たな節点のデータを入れるメモリを確保し、そこに切断面の節点のデータをコピーする。その後のオリジナルの節点とコピーされた節点の距離を刃物の厚さだけ離す (図4参照)。

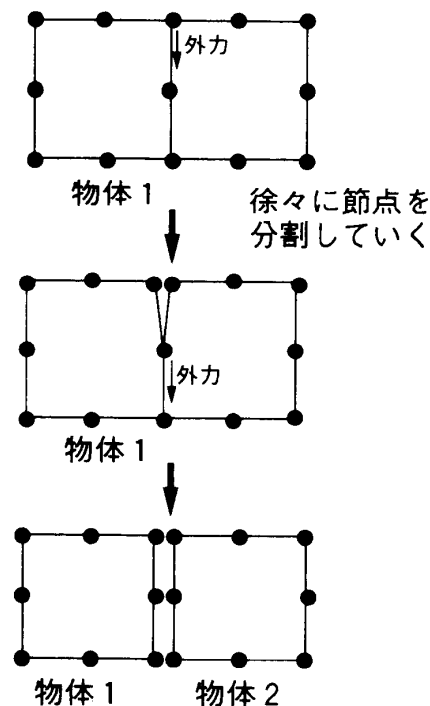


図4 分割の様子

3.3.2 ステップ3

分割されたそれぞれの断片に、新たに節点番号および要素番号を付け直して再構成していく（図4参照）。

4. 実験結果と考察

切断の一連の動作 入力データ

- 形状→一辺が10 (cm) の立方体
- 要素→ $10 \times 5 \times 10$ (cm) の要素2つ使用
- 外力→立方体の中心に -50 (g) その両端に (x 軸に平行) に -10 (g)
- 刃物の切れ味→0.5
- ヤング率→ 5.0 (g/cm)
- ポアソン比→0.2
- 剪断弾性限界応力→ 1.0 (g)

実行結果を図5に示す。第2章で述べたモデル化に従って、各段階の結果を示してある。

次に、パラメータを様々に変えて切断の様子がどのように変化するか調べてみる（変更するパラメータは一度に1つずつで、それ以外は全て前記のものと同じである）。

ヤング率（弾性係数） 図6に結果を示す。右の図のほうが弾力が大きいため、左の図より変形が小さい。

また、左の図には不自然な部分がある。上面の右の辺の真ん中が盛り上がっている。これは要素数に対して変形が大きすぎたためだと思われる。

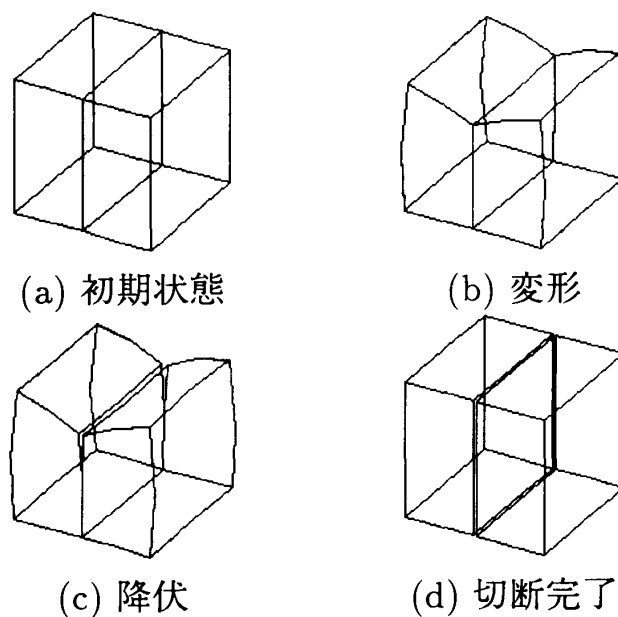


図5 切断の一連の動作

ポアソン（歪みやすさ） 図7に結果を示す。右の図のほうが歪みやすさが大きいいため、左の図より横（外力に対して垂直な方向）方向への広がり大きい。

剪断限界応力（切れにくさ） 図8に結果を示す。右の図のほうが左の図より剪断限界応力（切断されにくさ）が大きいため、分割が起きるまでに大きな変化を必要とする。

5. ま と め

本研究では

- 変形，降伏，分割という3つの処理による切断のモデル化
- ヤング率，ポアソン比，剪断限界応力という3つのパラメータによるある程度の質感の表現

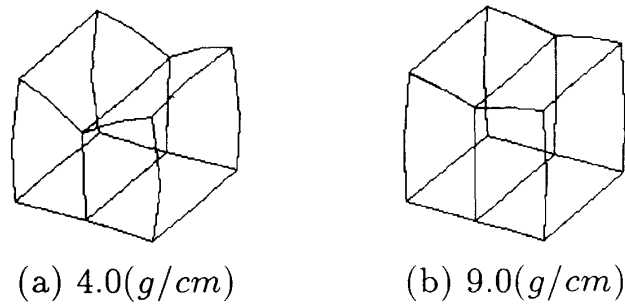


図6 ヤング率による変形の違い

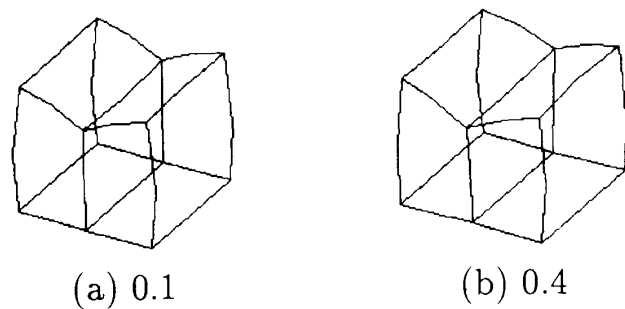


図7 ポアソン比による変形の違い

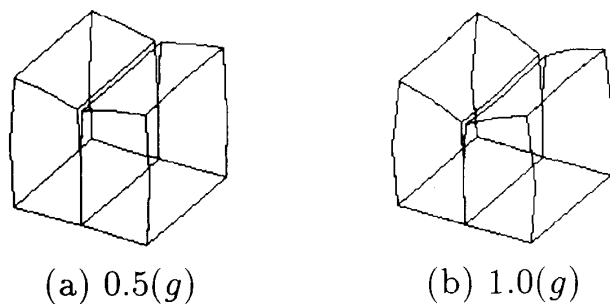


図8 剪断限界応力による切断の違い

を行い良好な結果を得た。単純な処理と少ないパラメータで幾らかの質感が表現できたことにより、切断をモデル化することが有効であると考えられる。しかし、本研究でのモデル化には、以下のような不備な点がある。

- 表現できる質感や物理現象が少ない。
- 各パラメータと実際の質感の関連づけが完全にはされていない。
- 誤差やひずみの対策をしていない。

特に“切断速度”，“刃物との摩擦”など実際の現象で重要であるにもかかわらず、表現できていないパラメータが多くあるため、より適切なモデルと処理を考える必要がある。

さらに“やわらかさ”など曖昧な質感をどのような具体的なパラメータで表現するかについても、今後検討が必要である。

参考文献

- 1) 田中喜久昭：“弾性力学と有限要素法”，大河出版（1995）。
- 2) 橋本英文：“刃物雑学事典”，講談社（1986）。
- 3) 平井孝之：“パソコン3次元有限要素法”，共立出版（1990）。
- 4) 森 博嗣：“C言語による有限要素法入門”，森北出版（1989）。
- 5) 戸川隼人：“BASICによる有限要素法の基礎”，サイエンス社（1985）。
- 6) 森 博嗣，黒川善幸：“C言語によるマトリックス演算”，森北出版（1988）。
- 7) R. ツルミュール：“マトリックスの理論と応用”，ブレイン図書出版株式会社（1972）。

A Study to Display the Process of Cutting a Soft Object

Toshikazu KAKEFUDA, Hideyuki SHIMADA,
Mitsuru SHIONO and Yoshiya MIYAGAKI

*Faculty of Engineering,
Okayama University of Science,
Ridai-chi 1-1, Okayama, 700 Japan*

(Received October 7, 1996)

The method to display the process of cutting has not researched enough. Then we propose a method to display the process realistically. The procedure of this method is following.

(1) deformation with "FEM (Finite-Element-Method)"

A body of a soft object is made up of some elements (hexahedron has 20 nodes). First we calculate deformation of each elements. Second we integrate each deformed elements and get whole deformation.

(2) yielding

We determine whether a cutlery can cut the body with current parameters.

(3) division

We divide nodes on a cut surface, then the body is divided.

In our experience, to control three parameters (flexibility, ease of distortion, and hardness to cut) we can display the process of cutting realistically.