

# 超流動ヘリウム中の量子渦による圧力損失

山口 稔・藤井 佳子・中村 改樹・重松 利信  
信貴豊一郎

岡山理科大学理学部応用物理学科

(1995年9月30日 受理)

## 1. はじめに

超流動ヘリウムの中に熱カウンター流があるとき、熱流が小さい範囲では、熱流の大きさに関係なく一定の熱伝達率を示す。この状態では、超流体も常流体も層流であると見られている。しかし、熱流が大きくなると、熱伝達率は熱流の関数として変化し、その値は熱流が大きくなると小さくなって行く。この状態は超流動ヘリウムの乱流状態と言われている。

超流動ヘリウムの乱流の問題は、当初、W.F. Vinen<sup>1)</sup>によって扱われた。W.F. Vinenは、超流動ヘリウムの中の超流体の速さがある限度を越えて大きくなると、超流体中に量子化された渦糸が出来て、その渦糸と常流体との摩擦によって、超流体と常流体の相対速度が減速されて、熱伝達率が小さくなるとした。その後、多くの人々によって研究が行われ、定常な状態については、渦糸長密度に着目して解析が行われて来た。乱流に2つの状態(乱流状態 I と II)があることや、渦糸長密度に最小値があることなど、多くの性質が明らかにされた<sup>2-5)</sup>。

この実験では、超流動ヘリウム中の渦糸が成長する様子、また、その渦糸と壁との相互作用を調べるために、ガラス毛細管の中の超流動ヘリウムに熱カウンター流を発生させて、毛細管の両端に生じた温度差および圧力差を測定した。R.J. Donnelly により提唱されたスケーリングの方法を使って渦糸長密度を決めた<sup>6)</sup>。まず、乱流状態 II のときについて、実験の結果と数値解析<sup>7,8)</sup>とを比較して、スケーリングの方法の適合性を確めた。そして、圧力差の測定値から渦糸と管壁との相互作用を吟味した。

また、乱流状態 I について、乱流状態 II のときの方法によって解析を行い、乱流状態 I のときの渦糸の性質を検査した。

## 2. 測定装置

測定装置の概略図を Fig. 1 に示す。毛細管の両端にそれぞれ超流動ヘリウム(He II)の溜を作り、上の溜は <sup>4</sup>He の蒸発室に接触させてある。蒸発室は、<sup>4</sup>He のガスをポンプで排気することによって、冷却を続ける。蒸発室に取り付けたヒーターの電流を PID 調節計

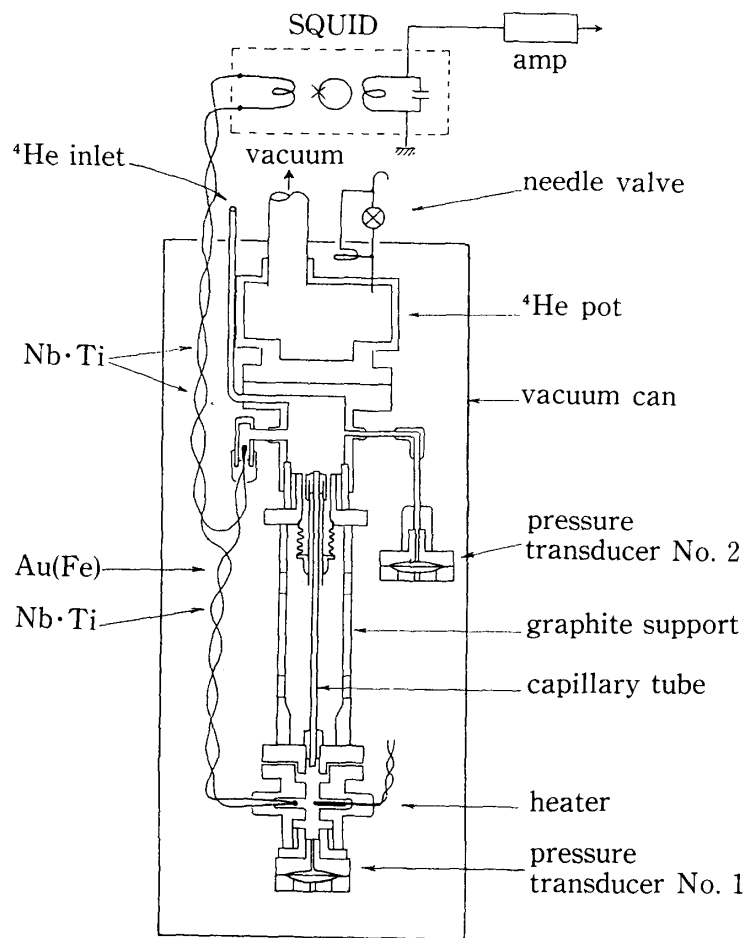
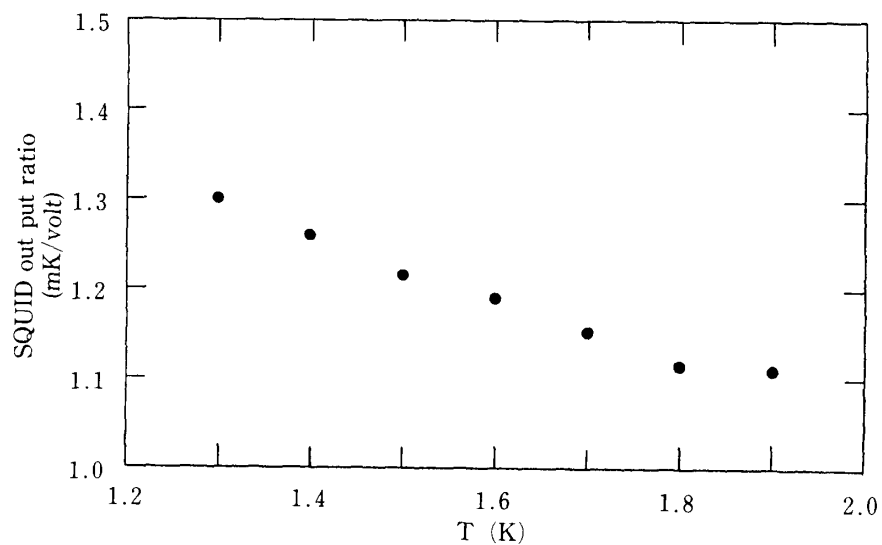


Fig. 1 測定装置の概略図

Fig. 2 温度  $T$  の関数で表した SQUID の出力電圧に対する熱電対両端の温度差の関係

(CHINO-model・DB)で制御して、所定の温度に保つようになっている。下の溜にはヒーターが挿入されていて、毛細管の中の He II に熱流を発生させる。下の溜は、毛細管と同軸に取り付けられたグラファイトの円筒により支持されている。

この実験で使用した毛細管はガラス製で断面は円形であり、太さは一様である。

## 2.1 温度差の測定

Au(0.03 at.%の Fe を含む)線と Nb・Ti 線とからなる熱電対の接合点を毛細管の上下の溜に浸す。2つの接合点に温度差があると、熱電対に電流が流れるので、この電流を SQUID (SHE-model 330X)で検出する。このようにして、SQUID の出力電圧から、毛細管の両端に生じた温度差を知ることができる<sup>9,10)</sup>。この実験で使用した熱電対と SQUID を組み合わせたものの出力に対する温度差の比を Fig. 2 に示す。

温度差の分解能は、温度が安定しているとき、大体  $2\mu\text{K}$  である。測定中、比較的大きな温度差を与えているとき  $10\mu\text{K}$  ぐらいであった。

## 2.2 圧力差の測定

2個の圧力計を毛細管の上下の溜に取り付けた。これらの圧力計は燐青銅薄膜で作ったメンブランの変位を電気容量の変化として読みとるものである<sup>10)</sup>。

Fig. 3-1にあるように、メンブランと対電極の間でコンデンサーを形成しており、これとコイルが直列に接続されていて、その共振周波数を周波数カウンターで読み取る。このようにして、周波数の変化から、圧力の変化を知ることができる。

この実験では、2個の圧力計は、各々真空に対する圧力を測定しているので、各々の共振周波数変化の差から、圧力差の変化を検出した。Fig. 3-2に、この実験で使用した圧力計の較正曲線を示す。

周波数の分解能は、大体 50 Hz であるが、圧力の測定には次の3つの問題があった。

①圧力計の経時変化

②試料系の超流動ヘリウムの液面の変化による周波数の基準の変化

③室温の変化や電源からのノイズによる周波数測定系の変化

である。

①については、測定開始時の周波数の較正と終了時の較正からこの間の圧力計の特性の変化を知ることが出来る。この実験では、連続測定の時間は5時間ぐらいであり、次の②に比べて①は無視出来る。②については、測定をしている途中での液面の変化を知ることが出来ないのであるが、この実験では、比較的熱流が小さいときの精度に重点を置くことにして、毛細管中に熱流を発生させる前と熱流を止めたときを基準にして、その間は内挿することにした。③は、一番面倒な問題である。これらについての対策をしているが、完全には除くことが出来ないため、出来る限り影響の少ない時間帯に測定している。③につ

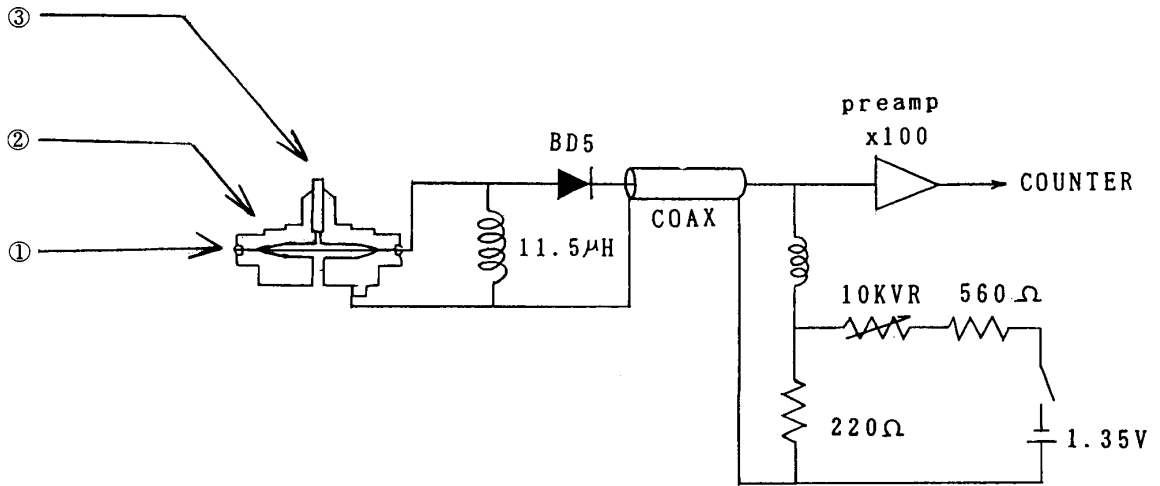


Fig. 3-1 圧力測定方法の概略図

① 燐青銅薄膜 ② 燐青銅ボディ ③ 液体ヘリウム溜への接続部

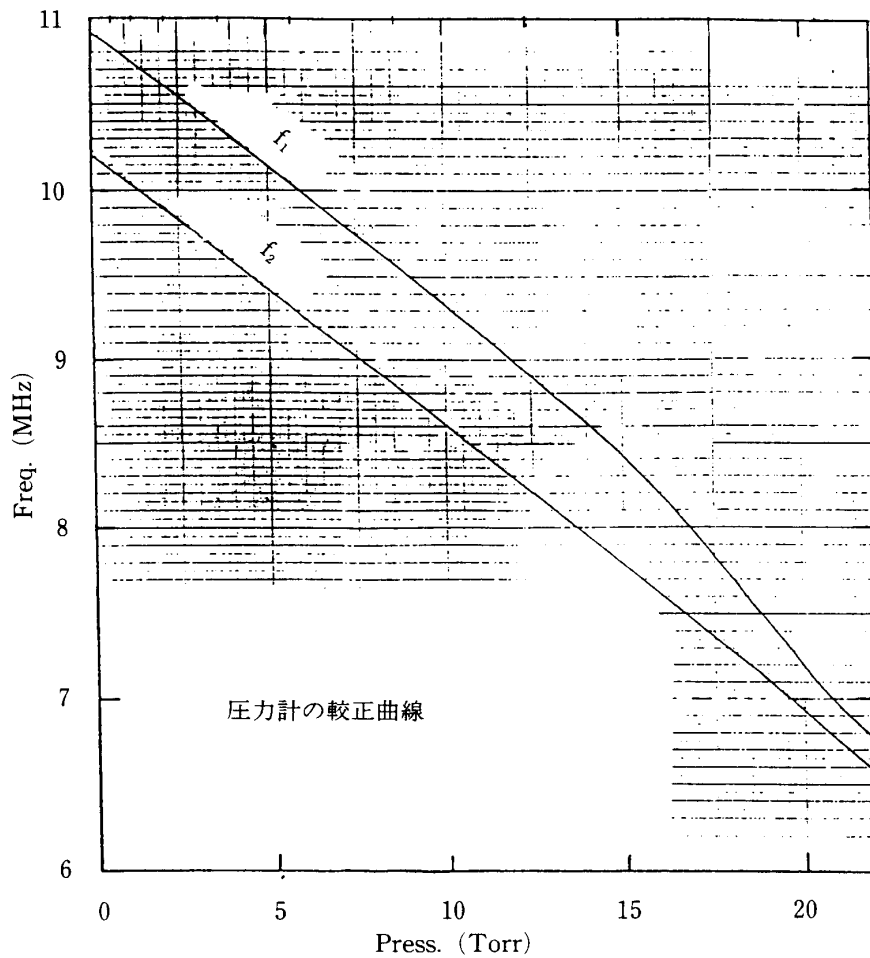


Fig. 3-2 圧力計の較正曲線

$f_1$ : 圧力計 No. 1 の周波数を表す。  $f_2$ : 圧力計 No. 2 の周波数を表す。

いての影響を見積るための検査を随時行っており、測定値への影響は②と同程度かそれより小さいと見積られている。

### 3. 測定値

ガラス毛细管の中の He II について、飽和蒸気圧のもとで、熱カウンター流があるとき、毛细管の両端に生じた温度差及び圧力差を測定した。この実験で使用した毛细管の寸法を Table 1 に示す。

Fig. 4 は tube No. 2 について、温度 1.7K のときの、熱流  $W$  の関数で表した温度差  $\Delta T$  の測定値である。また、Fig. 5 は、同じ tube について、 $W$  の関数で表した圧力差  $\Delta P$  を示す。

熱流  $W$  を増加させていくと、初め、温度差及び圧力差は、それぞれ、 $\Delta T \propto W$ 、 $\Delta P \propto W$  の関係を示すが、ある大きさの熱流になると、温度差、圧力差とも飛躍する (A点)。温度差及び圧力差について、飛躍した後、熱流を減少させていくと、グラフにあるように曲線の形をたどり、 $W_1$  を境にして、 $W < W_1$  では熱流を増加させていくときの直線をた

Table 1 実験で使用した毛细管の寸法

Tube No.	Material	Cross section	Inner diameter $d$ ( $\times 10^{-2}$ cm)	Length $l$ (cm)
1	glass	circle	1.30	9.6
2	glass	circle	1.26	9.6

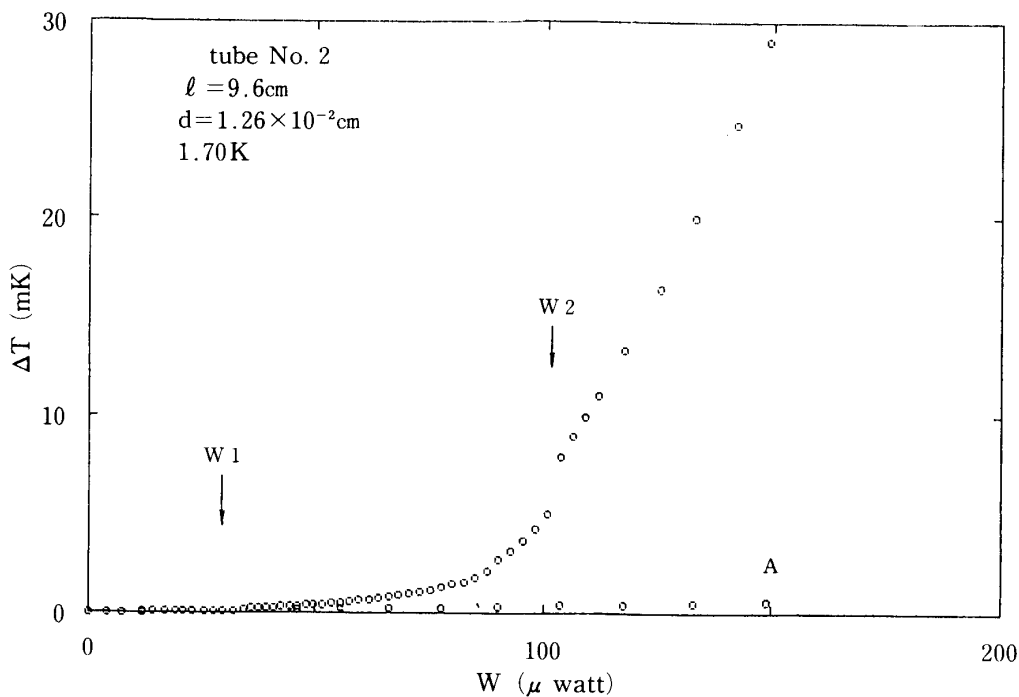


Fig. 4 熱流  $W$  の関数で表したガラス管両端の温度差  $\Delta T$

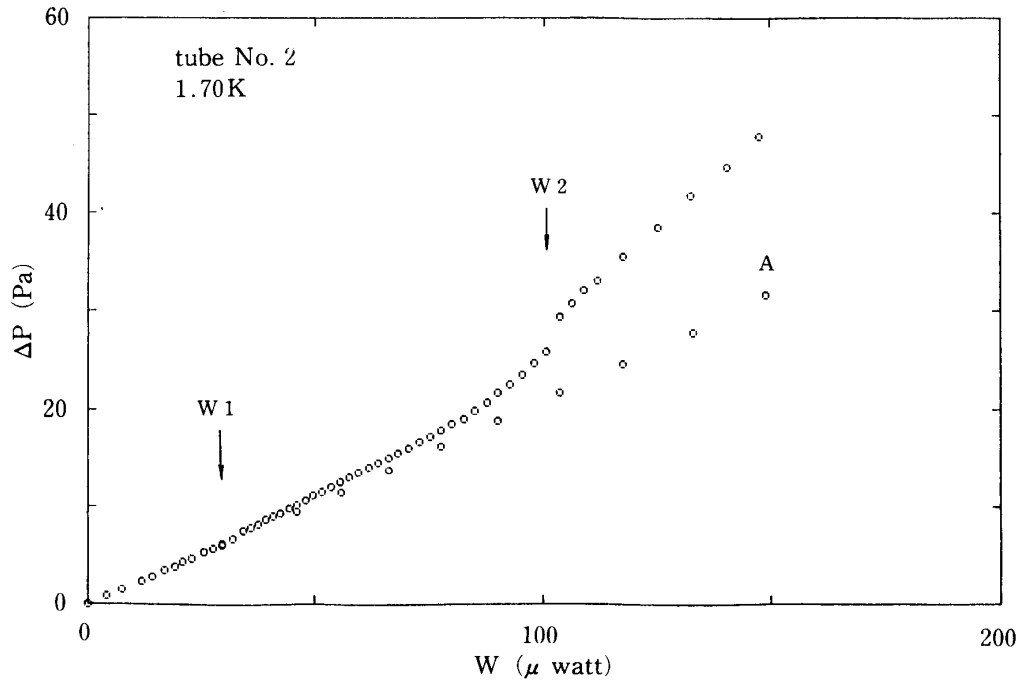


Fig. 5 熱流  $W$  の関数で表したガラス管両端の圧力差  $\Delta P$

どる。

### 3.1 $\Delta T \propto W$ のとき

Fig. 6 は, tube No. 2 について,  $\Delta T \propto W$  の関係を示す部分の測定値から, He II の熱抵抗率を求めたものである。ガラス管の中の超流動ヘリウムについて, 常流体はガラス管の中を高温部から低温部の方向へ層流として流れて熱を運搬し, 超流体は抵抗なしに常流体とは反対の方向に流れているとすると, 熱抵抗率は次の式で表される。測定値はこの式により計算したものとよく一致する。これにより常流体の流れは層流であることが確かめられる。

$$\frac{\Delta T}{w} = \frac{32\eta_n l}{(\rho S)^2 T d^2} \quad (1)$$

ここに,  $T$ : 液体ヘリウムの温度,  $\Delta T$ : 管の両端の温度差,  $\rho$ : 液体ヘリウムの密度,  $S$ : 液体ヘリウムの単位体積当たりのエントロピー,  $w$ : 管の中の液体ヘリウムの単位体積当たりの熱流,  $l$ : 管の長さ,  $d$ : 管の内径,  $\eta_n$ : 液体ヘリウムの粘性率である。

### 3.2 相互摩擦力及び渦糸長密度

Fig. 4, 5 の曲線で表される部分では, 超流動ヘリウムについての乱流状態と呼ばれ, 超流体に渦糸が出来ているとされている。常流体の流れについては, Fig. 4 の  $W_1$  のところでレイノルズ数は 70—90 なので,  $W_1$  の近くの熱流では層流とみなされる。

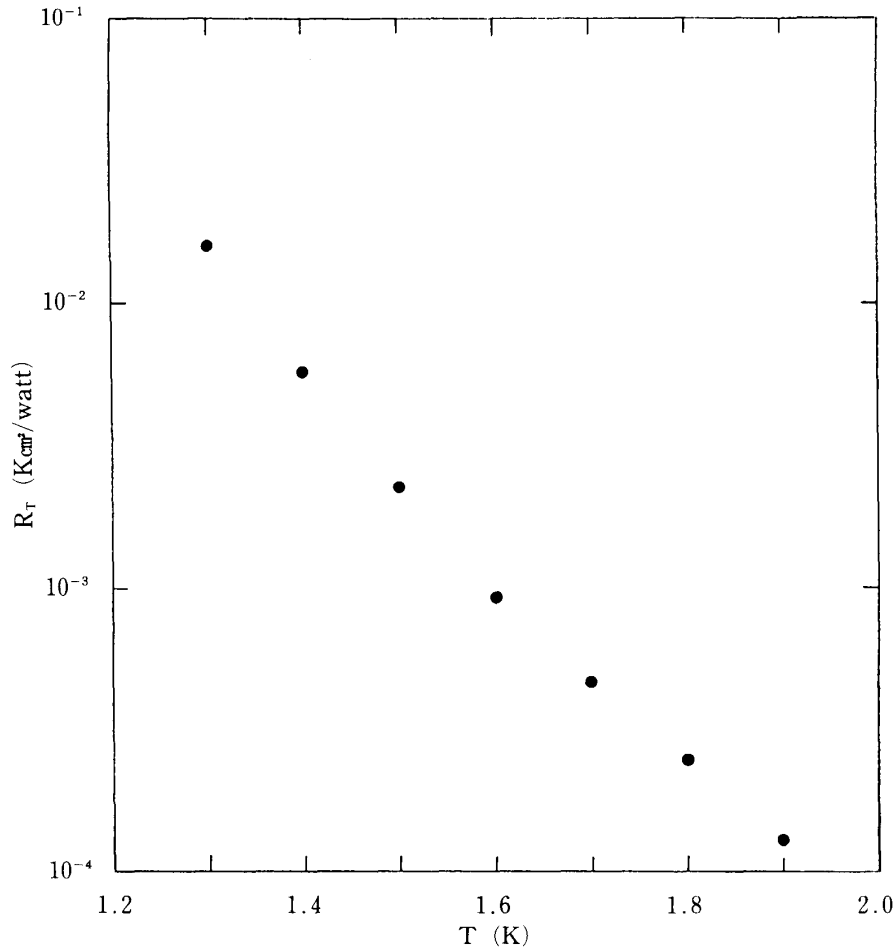


Fig. 6 温度  $T$  の関数で表したガラス管の中の超流動ヘリウムの熱抵抗率  $R_T$

細い管の中の超流動ヘリウムについて、質量流がゼロで、超流体と常流体とが反対方向に流れている熱カウンター流では次の関係がある。

$$\begin{cases} \rho_s v_s + \rho_n v_n = 0 \\ \rho = \rho_s + \rho_n \\ V = v_n - v_s \\ w = \rho_s T v_n \end{cases} \quad (2)$$

ここに、 $\rho_s$ : 超流体の密度、 $\rho_n$ : 常流体の密度、 $v_s$ : 超流体の速度、 $v_n$ : 常流体の速度、 $V$ : 超流体と常流体の間の相対速度。式(2)より、相対速度  $V$  は次のように表すことができる。

$$V = \frac{w}{\rho_s T} \quad (3)$$

超流体に渦糸が出来ているときに、管の両端に生ずる温度差  $\Delta T$  は渦糸がないときよりも大きくなるので、その温度差の増加分と、超流体と常流体の間の相互摩擦力  $F_{sn}$  は、次の式で表される<sup>6,14)</sup>。

$$\frac{\Delta T - \Delta T_L}{l} = \frac{1}{\rho_s S} F_{sn} \quad (4)$$

$$F_{sn} = \rho_s \kappa \alpha (I_{||} - c_L I_l) L V \quad (5)$$

ここに、 $\Delta T_L$ : 層流状態を仮定したときの管の両端の温度差、 $F_{sn}$ : 超流体と常流体の間の相互摩擦力、 $L$ : 渦糸長密度、 $\kappa$ : 循環 ( $\kappa = h/m$ , 但し、 $h$  はプランク定数、 $m$  はヘリウム原子の質量)、 $\alpha$ : 相互作用の係数。そして、 $c_L$ ,  $I_{||}$ ,  $I_l$  は次の式で定義されている。

$$L = c_L \frac{V^2}{\beta^2} \quad (6)$$

$$\begin{cases} I_{||} &= \frac{1}{\Omega L} \int (1 - (\vec{s}' \cdot \vec{V}_{||})^2) d\xi \\ I_l \vec{V}_{||} &= \frac{1}{\Omega L^{3/2}} \int (\vec{s}' \times \vec{s}'') d\xi \end{cases} \quad (7)$$

$\beta$  は渦糸の自己誘導速度が相互摩擦力に寄与する大きさの係数で次の式で与えられる。

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \log_e \frac{1}{c_1 a_0 L^{1/2}} \quad (8)$$

ここに、 $\pi$ : 円周率、 $e$ : 自然対数の底、 $c_1$ : スケーリング係数<sup>7)</sup>、 $a_0$ : 渦糸の有効半径 ( $1.3 \times 10^{-8}$  cm)、 $\xi$ : 渦糸に沿って測られた長さ、 $\vec{s}'$ : 渦糸の  $\xi$  の点での接線方向の単位ベクトル (渦糸の渦度の方向が正)、 $\vec{s}''$ :  $\vec{s}'$  に垂直なベクトルで、大きさが曲率半径の逆数 (曲率の方向が正)、 $\Omega$ : 体積、 $\vec{V}_{||}$ :  $\vec{V}$  方向の単位ベクトル。また、 $\alpha$  は相互作用についての測定値  $B^{12)}$  と次の関係にある。

$$\alpha = \frac{\rho_n}{2\rho} B$$

そこで、式(4), (5), (6)から、

$$\frac{\Delta T - \Delta T_L}{l} = \frac{\kappa \alpha}{S} (I_{||} - c_L I_l) \frac{c_L^2}{\beta^2} V^3 \quad (10)$$

となるので、この式の定数  $(I_{||} - c_L I_l) c_L^2$  を調べることにする。Fig. 7 は tube No. 1, No. 2 について、 $(\beta^2 F_{sn})^{1/3}$  を相対速度  $V$  の関数として表したものである。Fig. 7 のグラフについて、

$$(\beta^2 F_{sn})^{1/3} = k_{F_2} V$$

とにおいて、係数  $k_{F_2}$  を求めた。各々の tube の  $k_{F_2}/(\rho_s \kappa \alpha)^{1/3}$  を Fig. 8 に示す。これは  $((I_{||} - c_L I_l) c_L^2)^{1/3}$  に対応するので、計算値と比較することが出来る。

### 3.3 臨界速度

乱流状態にある所で、熱流を減少させて行くと、Fig. 4, Fig. 5 にあるように、 $W_1$  で示



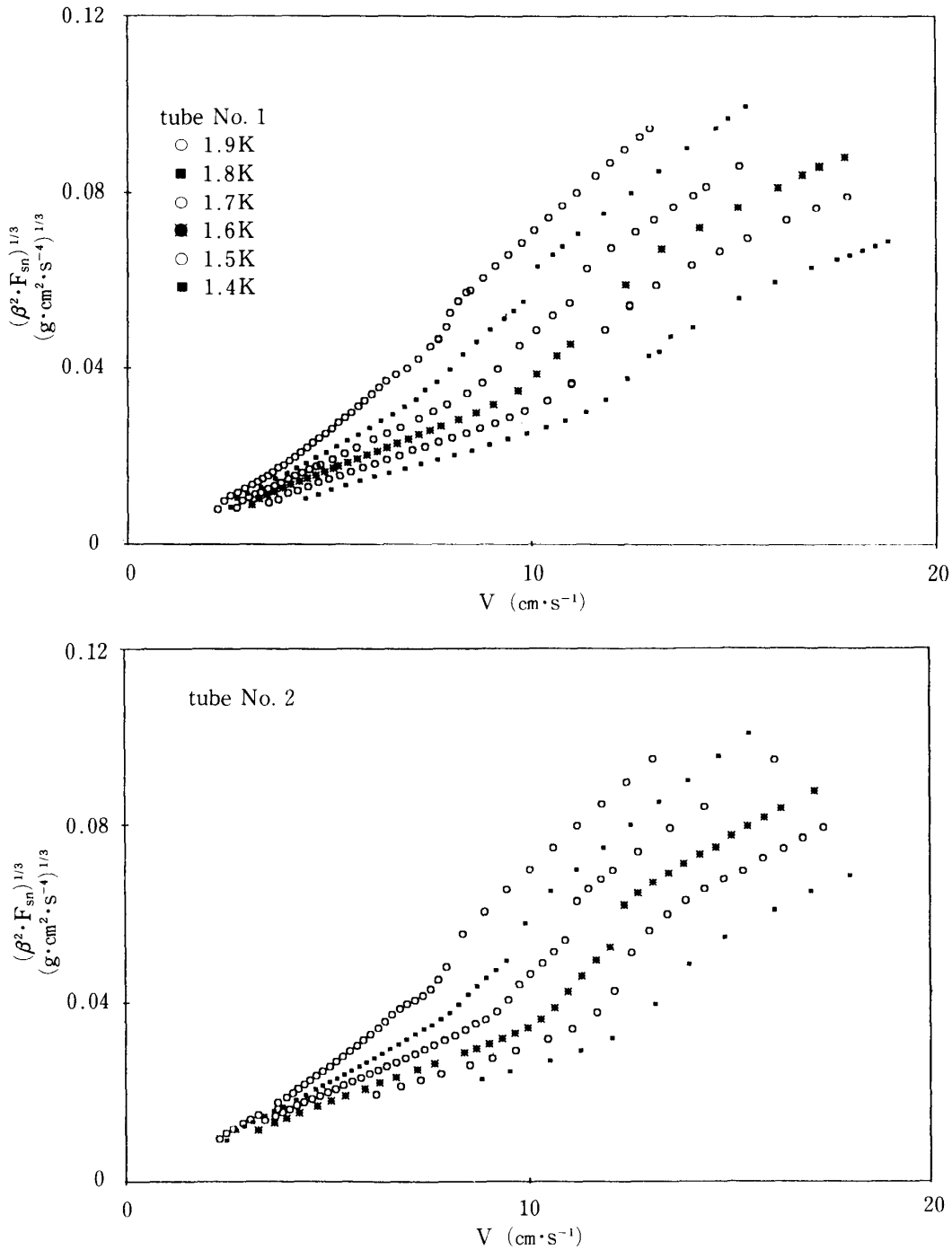


Fig. 7 相対速度  $V$  の関数で表した相互摩擦力  $F_{sn}$

但し、縦軸は  $(\beta^2 F_{sn})^{1/3}$  で表されている。 $\beta$  は渦糸の自己誘導速度が相互摩擦力に寄与する大きさの係数で、次の式で与えられる。 $\beta = (\kappa/4\pi) \log_e(1/c_1 a_0 L^{1/2})$

した熱流から、温度差及び圧力差の大きさは不連続な変化をして、 $\Delta T \propto W$  及び  $\Delta P \propto W$  で表される関係に移行する。熱流が  $W_1$  のときを He II 中に渦糸が保たれている最小の大きさの熱流と見なして、このときの超流体と常流体の間の相対速度を  $V_{c1}$  で表す。この  $V_{c1}$  を臨界速度と呼ぶことにする。 $V_{c1}$  の値を Table 2 に記入した。

W.F. Vinen<sup>1)</sup> は  $V_{c1} \propto 1/d$  の関係を予言している。この実験では、 $V_{c1}$  の  $d$  への依存が

はっきりしないが、温度の関数として変化した。

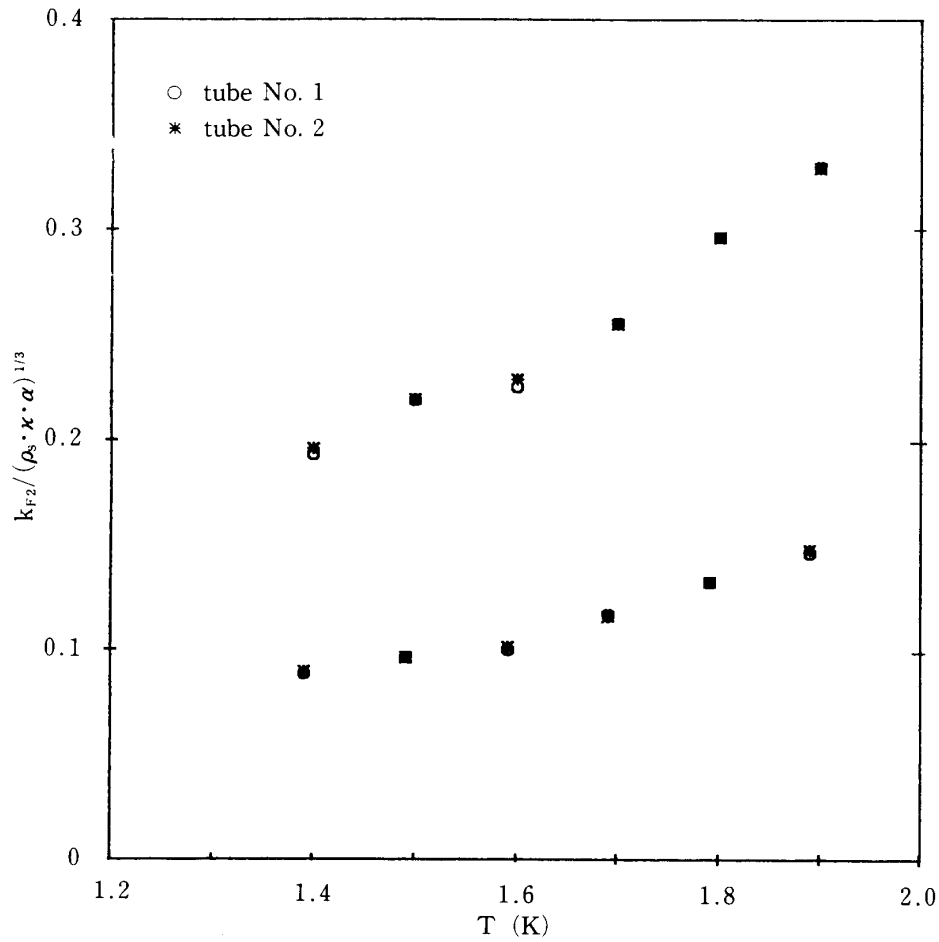


Fig. 8 温度の関数で表した  $k_{F2}/(\rho_s \kappa \alpha)^{1/3}$   
 $k_{F2}$  は Fig. 7 から求めたものである。

Table 2

Tube No.	$T$ (K)	$V_{c1}$ ( $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$L^{1/2} c_1 d$	$c_{LE}$	$c_{PK}(T)$ ( $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ )
1	1.9	2.2	2.3	0.228	—
	1.8	2.2	2.3	0.193	0.0163
	1.7	2.8	2.4	0.149	0.0167
	1.6	3.0	2.3	0.133	0.0163
	1.5	3.5	2.6	0.126	0.0162
	1.4	4.4	3.1	0.104	0.0171
	2	1.9	2.2	2.4	0.227
2	1.8	2.3	2.3	0.193	0.0174
	1.7	2.8	2.3	0.151	0.0182
	1.6	3.0	2.3	0.134	0.0179
	1.5	3.5	2.6	0.127	0.0184
	1.4	—	—	0.108	0.0195

## 3.4 渦糸長密度の相対速度依存性

上で、 $(I_{||} - c_L I_i) c_L^2$  を求めたが、測定値から  $(I_{||} - c_L I_i)$  と  $c_L^2$  を独立に決めることは出来ない。そこで、K.W. Schwarz<sup>7,8)</sup> の  $(I_{||} - c_L I_i)$  の計算値を使って、渦糸長密度を求める。相対速度  $V$  の関数として表した  $L^{1/2}$  を Fig. 9 に示す。図にあるように、 $L$  の  $V$  依存性から、 $L$  の大きさによって渦糸の性質が異なっている。Fig. 9 に破線で示すように、乱流状態を3つの領域に分けられる。

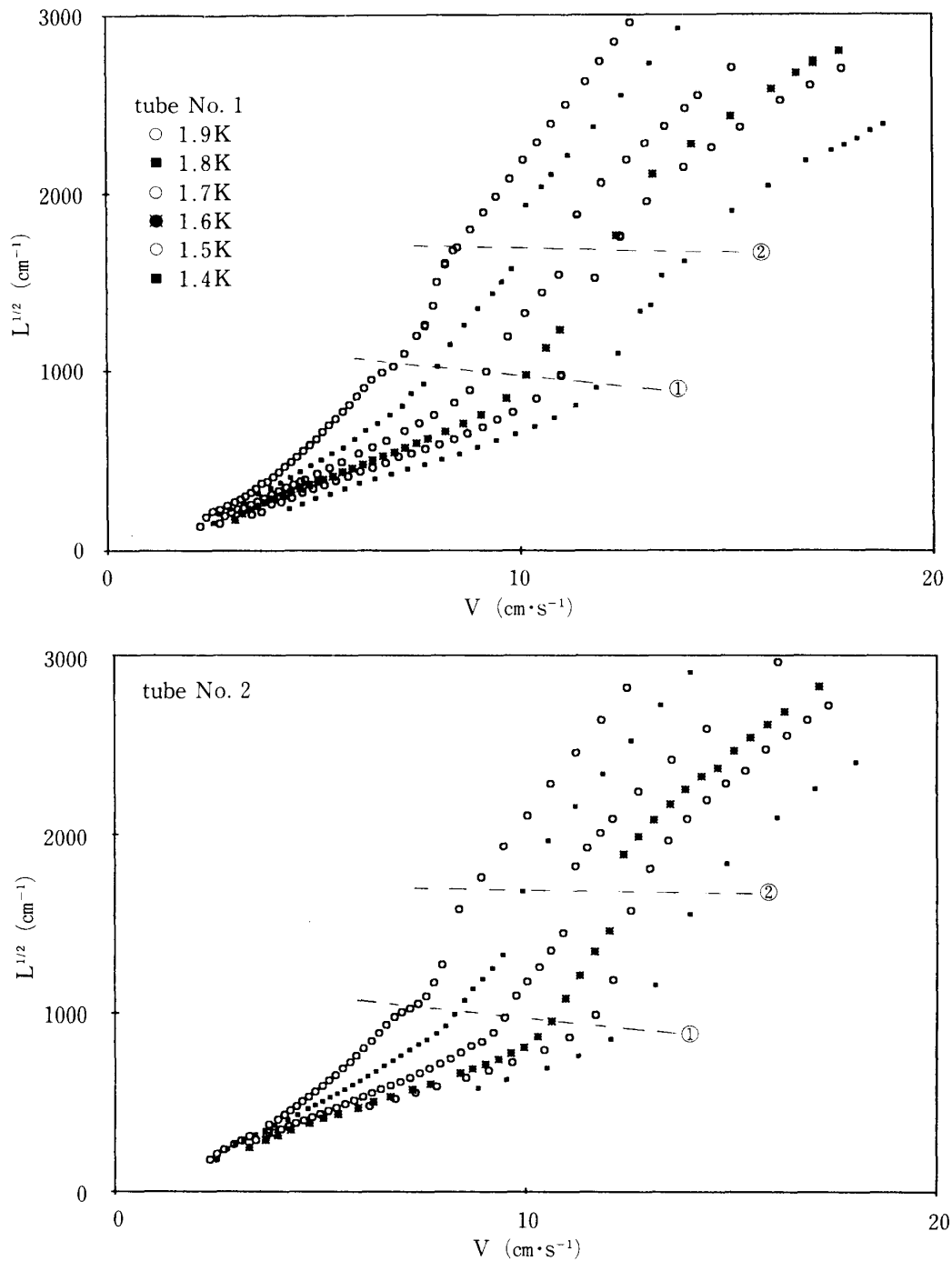


Fig. 9 相対速度  $V$  の関数で表した渦糸長密度  $L$

①  $L^{1/2}$  が破線①より小さい領域は乱流状態 I (T I) と呼ばれる<sup>3)</sup>。

②  $L^{1/2}$  が破線②より大きい領域は乱流状態 II (T II) と呼ばれる。

③ 破線①と②の間の領域を遷移領域と呼ぶことにする。Fig. 4, 5 の  $W_2$  で示す部分が図の破線①と②で示す間の部分に相当する。

Fig. 9 に示されている渦糸長密度はスケーリング係数を使って導き出されたものであるが、改めて、 $L$  と  $V$  の関係を調べる。

Tube No. 1, No. 2 ともに 1.5K, 1.6K, 1.7K では T II 状態の延長が原点を通ると見ることが出来る。そこで

$$L^{1/2} = \frac{c_{LE}}{\beta} V$$

とにおいて、係数  $c_{LE}$  を求める。他の温度については、グラフに最適の直線をとって、その傾きを  $c_{LE}$  と同じ扱いにする。ここに求めた  $c_{LE}$  を Table 2 に記入した。

### 3.5 渦糸長密度の臨界値

渦糸長密度についても、 $W_1$  のときの大きさをその臨界値と呼ぶことにする。これは He II 中に保持されている渦糸の最小限とされている。測定値より求めたものを  $L^{1/2} c_{1d}$  の値で Table 2 に記入した。2.2~3.1 の範囲に分布しているが、平均値として

$$L^{1/2} c_{1d} \doteq 2.5$$

と置くことが出来る。

W.F. Vinen は  $L^{1/2} c_{1d} = 2.0$  を予期したが、多くの研究者の測定値は 2.0 よりも大きい<sup>3-5)</sup>。

### 3.6 乱流状態 I

Fig. 7 に見られるように、乱流状態 I において  $(\beta^2 F_{sn})^{1/3} \propto V$  の関係は一層顕著である。

$$(\beta^2 F_{sn})^{1/3} = k_{F_1} V$$

とにおいて係数  $k_{F_1}$  を求めた。ここに求めた  $k_{F_1}$  を Fig. 8 に T II 状態のときと同じ目盛りで記入した。T I 状態と T II 状態とで同じ形の関係を示すが、係数の大きさは異なる。係数の大きさの違いは、同じ渦糸長密度のとき、T I 状態では T II 状態よりも渦糸と常流体の相互作用が小さいことを表している。

### 3.7 圧力差について

式(4), (5)は渦糸と常流体の相互作用に着目した関係式であるが、この両者の相互作用のみでは圧力差は生じない。

超流動ヘリウムが乱流状態になったとき、層流状態にあるときよりは余分に壁と相互作

用が生じている。そのために、余分の圧力差が生じる。

そのときの関係式は次のように示される<sup>14)</sup>。

$$\frac{\Delta P - \Delta P_L}{l} = \rho_s \kappa \zeta K(T) L V \quad (12)$$

ここに、 $\Delta P$ : 管の両端の圧力差,  $\Delta P_L$ : 層流状態を仮定したときの管の両端の圧力差,  $K(T)$ : 温度に依存する係数,  $\zeta$ : 相互作用の係数。式(12)に式(6)を代入すると,

$$\frac{\Delta P - \Delta P_L}{l} = \rho_s \kappa \zeta K(T) \frac{c_L^2}{\beta^2} V^3 \quad (13)$$

となる。そこで、tube No. 1 の圧力差の測定値について、 $\beta^2(\Delta P - \Delta P_L)/l$  と  $V$  の関係を対数グラフで表すと Fig. 10 のようになる。T I 状態と T II 状態に分離するが、それぞれ、グラフの傾きは 2.0 と見積ることが出来る。従って、 $\zeta \propto V^{-1}$  が期待される。

そこで、

$$\zeta = \frac{c_p}{V} \quad (14)$$

とおいて、式(6)を使って、次の式を得る。

$$\frac{\Delta P - \Delta P_L}{l} = \rho_s \kappa c_p K(T) L \quad (15)$$

Fig. 11 は、 $Ld^2$  の関数として表した  $(\Delta P - \Delta P_L)/l$  を示す。Fig. 11 の傾きから求めた  $c_p K(T)$  を Table 2 に記入した。このように、渦糸による圧力損失は渦糸長密度  $L$  に比例してい

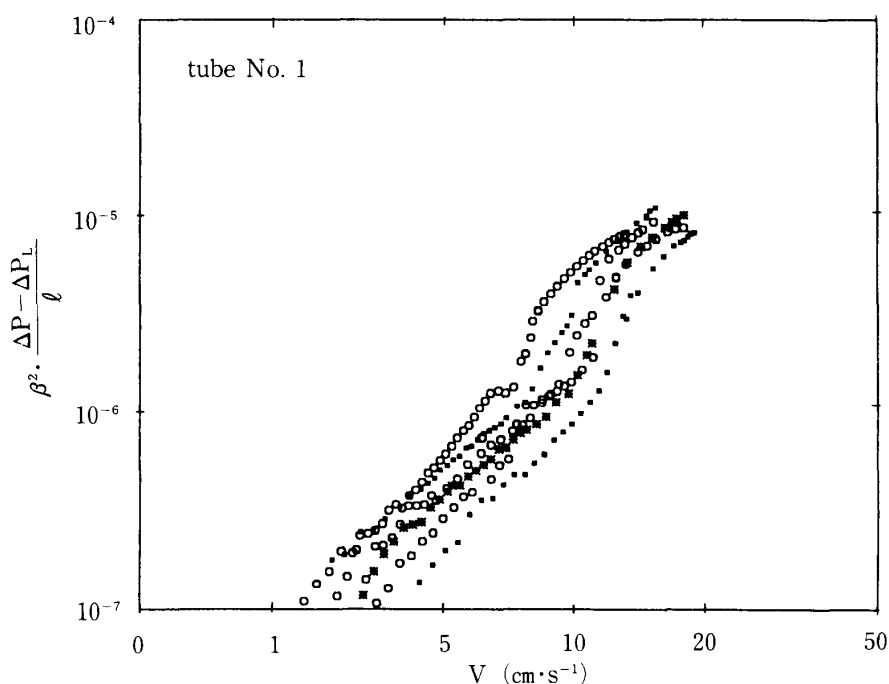


Fig. 10 相対速度  $V$  の関数で表した換算された圧力差  $\beta^2(\Delta P - \Delta P_L)$

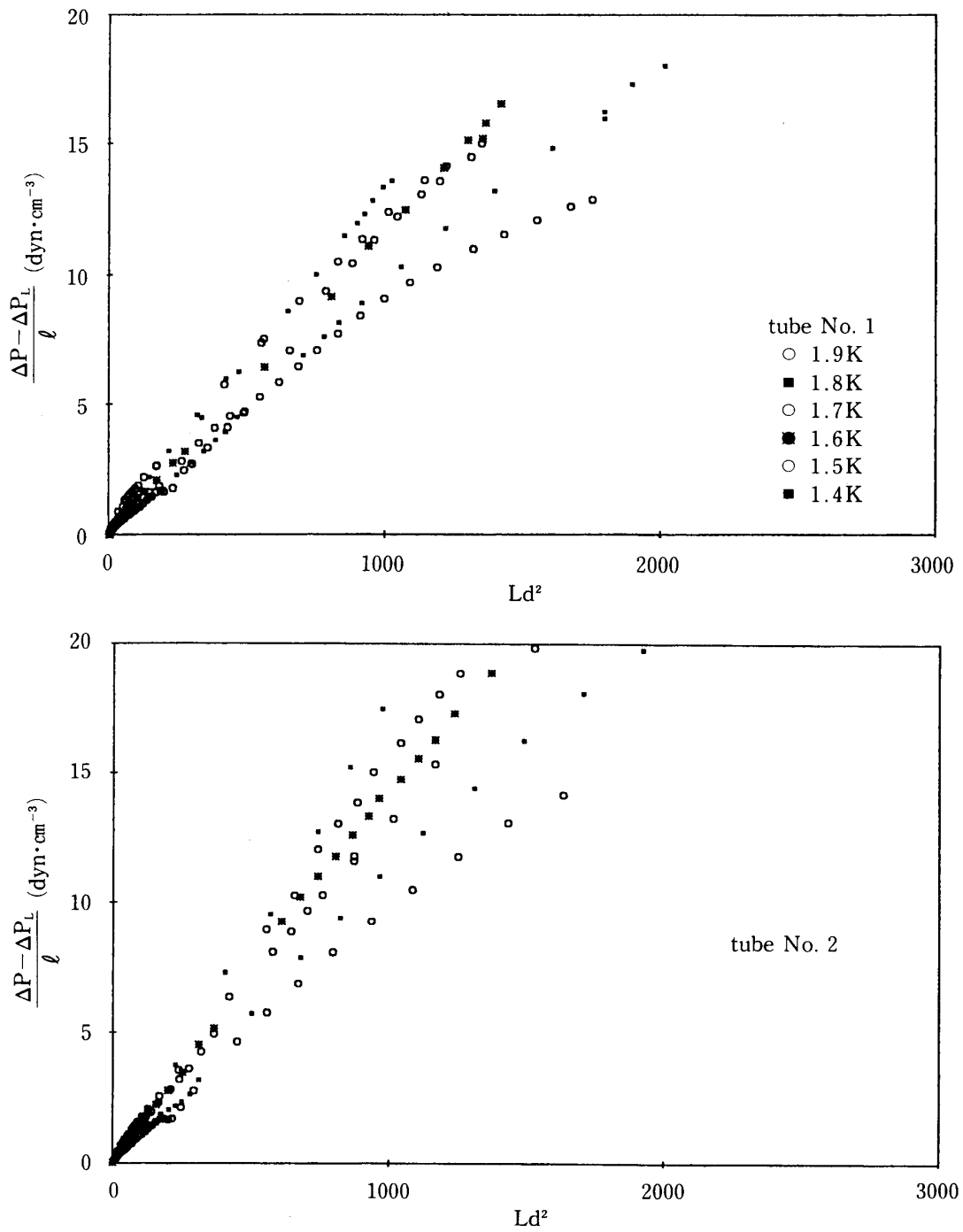
Fig. 11  $Ld^2$  の関数で表した余分に発生した圧力差 ( $\Delta P - \Delta P_L$ )

Table 3

$T$ (K)	$\alpha$	$c_1$	$c_L$	$I_{  } - c_L I_i$	$((I_{  } - c_L I_i) c_L^2)^{1/3}$
1.9	0.1806	1.11	0.195	0.755	0.306
1.8	0.1344	1.22	0.174	0.742	0.282
1.7	0.1140	1.32	0.154	0.731	0.259
1.6	0.0926	1.43	0.133	0.719	0.233
1.5	0.0687	1.55	0.118	0.713	0.215
1.4	0.0528	1.68	0.100	0.710	0.192

る。T I 状態と T II 状態とで渦糸長密度の大きさは違うが、圧力損失の  $L$  への依存は同じになった。

## 5. ま と め

i) 毛細管両端の温度差の測定から、スケーリング係数を実験的に決めることが出来た。 $(I_{||} - c_L I_i) c_L^2$  の値は T II 状態で数値シミュレーションによる結果とよい一致を見た。

ii) スケーリング係数を使って定めた渦糸長密度と圧力損失の関係を調べることにより、渦糸と管壁との相互作用の強さを表す係数を求めることが出来た。この係数は T I 状態と T II 状態とで同じ大きさになった。

## References

- 1) W.F. Vinen, Proc. R. Soc. London, Ser. A242, 493 (1957), 243, 400 (1957).
- 2) D.F. Brewer and D.O. Edward, Philos. Mag. **6**, 1174 (1961), **6**, 775 (1961) and **7**, 721 (1962).
- 3) J.T. Tough, in Progress in Low Temperature Physics, edited by D.F. Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1982) Vol. 8, p. 133.
- 4) R.K. Childers and J.T. Tough, Phys. Rev. **B13**, 1040 (1976).
- 5) K.P. Martin and J.T. Tough, Phys. Rev. **B27**, 278 (1983).
- 6) R.J. Donnelly, "Quantized Vortices in Helium II", Cambridge University Press (1991).
- 7) K.W. Schwarz, Phys. Rev. **B38**, 2398 (1988).
- 8) K.W. Schwarz, Phys. Rev. **B44**, 7563 (1991).
- 9) 前野悦輝, 固体物理 **20**, 234 (1985).
- 10) 山口 稔, 藤井佳子, 低温工学 **21**, No. 2 (1986).
- 11) J. Wilks, "The Properties of Liquid and Solid Helium", Oxford, (1967).
- 12) E.J. Yarmchuk and W. Glaberson, J. Low Temp. Phys. **36**, 381 (1979).
- 13) Marie L. Baehr and J.T. Tough, Phys. Rev. **B32**, 5632 (1985).
- 14) 山田一雄・大見哲巨共著, 超流動 (1995).

## Pressure Dissipation by Quantized Vortex in Superfluid $^4\text{He}$

Minoru YAMAGUCHI, Yosiko FUJII, Masaki NAKAMURA,  
Tosinobu SIGEMATU and Toyoichiro SHIGI

*Department of Applied Physics,*

*Okayama University of Science, Faculty of Science,*

*Ridaicho 1-1, Okayama 700,*

(Received September 30, 1995)

Measurements have been made of the heat transfer in liquid helium II in two capillary glass tubes. The inside diameter of the glass tube were  $130\ \mu\text{m}$  and  $126\ \mu\text{m}$  respectively, their length were  $9.6\ \text{cm}$  both. Heat supplied to a lower part of a cell produced a thermal counter flow in the glass tube. The temperature differences ( $\Delta T$ ) across the tube was measured using a thermocouple (Au [0.03 at. % Fe]—Nb·Ti) with a SQUID detector. The pressure difference ( $\Delta P$ ) across the tube was detected by two phosphor-bronze-membrane pressure transducers.

The quantized vortex line length density calculated from the temperature differences showed the two regions, the turbulent I and II. In the turbulent II, Donnelley's scaling coefficient was obtained from the gradient of the reduced vortex line length density vs. the relative velocity. This was fit for the calculation value by K. W. Schwarz. The interaction coefficient between the vortex line and the tube wall was investigated using scaling method from the pressure difference data. The obtained value of the interaction coefficient in the turbulent I region was the same value as that of the turbulent II region.