教養としての数学

―― 数学的論理思考 ――

船　倉　武　夫

岡山理科大学理学部共通講座

(1994年9月30日　受理)

1．日本数学会の会報「数学」が集約した平成5年度“数学教育”専攻の修士論文の題目リストは，“数学”らしい題目が並び，“数学教育”らしい題目は3割強である。

大学名：	千葉	学芸	横浜	三重	大教	神戸	広島	山口	鳴門	熊本：	合計
論文数：	9	3	12	2	5	4	5	6	7	2：	65
数学教育的：	2	4	0	3	4	3	3	1	1	0：	20

不可思議な現象である。教育学部でない理学部数学科には教職志望の学生が多数いるのに専門科目に数学教育の科目がない。現在，多くの数学科は大学制度の大綱化のもと，再編成が迫まられ組織の名称から数学が消えていく[13]。

2．日本物理教育学会，日本物理学会，応用物理学会は平成6年4月12日に「理科教育の再生を許える」に関する呼びかけを行った。これに啓発され，7月2日に，日本数学会・日本数学教育学会・日本応用数学会・数学教育学会の4学会は，公開シンポジューム〈数学教育の危機〉を共催し，「数学教育の危機を訴える」との共同声明文が発表した。前文には，

> 数学的知識の高度化，応用力の強化のためには，知識の単なる量的増大でなく，問題を分析し，その構造を読みとって解決するという数学的思考力の育成が必須である。ところが種々の報告によれば，近年学校教育において数学嫌い，理工系離れの傾向が顕著であり，しかも年々問題は深刻化の一途をたどっている。教育現場にある者達は学生生徒の数学的能力，特に論証能力の著しい低下を身にしみて感じている

と書かれている。拙論[9]で報告した本学の状況が本学固有の局所現象でないのである。

数学会会員の多数が非数学科に奉職しているにもかかわらず「数学」誌の主たる関心は数学科のカリキュラムにあり、非数学科の大学数学教育を論じる記事が載るようになったのは近年のことである。そもそも

「数学は先生から教わったから直ちに出来きるようになるのでなく，自ら学びとらねば

出来るようにならない」
との考えを多くの教師が信俸していたからにほかならない。教育学の理念的成果としてではなく，自らの個人的体験を通して帰納的に体得した信念に基づいてこの共感は形成されている。高校数学を７，８割以上を理解した学生が大学に入学しているのならば，筆者も賛同する。しかしこの前提条件は瓦解してしまっている。

入試科目で「数学」の教科から，「微分積分」と「統計確率」を外して，合格最低点を100点満点で60点と想定したとき，

$$\text{高校数学の理解量の割合} = \frac{\text{「微積」「統確」外しの10単位}}{\text{高校数学16単位}} \times \frac{60}{100}$$

で算出してみると，受験指導体制が行き届いた現状では，本学の受験生は，高校数学の全内容の４割程度しか理解していない層であるとの結論を得てしまうのである。

今年度より導入が開始された新学習指導要領では，更に高校数学の選択の幅が広がり，次の通りになった。

数学Ｉ	４単位　必修	数学Ａ	４単位から２単位選択
数学II	３単位　選択	数学Ｂ	４単位から２単位選択
数学III	３単位　選択	数学Ｃ	４単位から２単位選択

「数学Ｉ，II，III」がコアとし，「数学Ａ，Ｂ，Ｃ］がそれらの上に乗り，更に生涯にわたる学習へ発展することを建て前としている。特に，国民の教養として「数学Ｉ」と「数学II」の７単位を位置づけているが，高校卒業には数学における最低単位数は必修の「数学Ｉ」の４単位だけである。詳しくは学習指導要領[5]あるいは拙論[9]を参照してほしい。大学センター試験科目指定では，さらに「数学Ａ」，「数学Ｂ」も選択可能ではあるが，「数学Ｉ」，「数学II」だけでも十分である。

これらを考慮して，

$$\text{高校数学の理解量の割合} = \frac{\text{「数 I，II」7単位}}{\text{高校数学22単位}} \times \frac{60}{100}$$

で見積るとなんと２割にとどかないのである。単位数加増６単位は，コンピュータ活用の応用数理であり，伝統的数学でないことを考慮して，分母を16単位に置換しても３割に到達しない。

授業時間数に換算すると，高校数学の全内容を消化するには，各学年とも７，８時間が必要であるが，一般的に普通高校の理数系で１年生６時間，２，３年生５時間の配当が予想されている。ところで，今回の改訂では数学においても上記以外にその他の科目として20単位まで追加が出来るようになり，その枠を利用してすべての内容をこなす道も拓かれている。しかし，理工系大学（本学も含む）であってすら高校数学が理解していないあるいは学習していない学生の比率はますます増加していくと予想されている。要するに，学習時間数不足を補い，大学数学のスタートラインを揃えるために，大学の１年での「数学」

は高校数学そのものを高校との繰り返しを恐れず授業をせねばならない。高校での１単位は週50分間授業を年35週することに当り，「数学Ⅲ」(微分積分)（３単位)の学習時間数は週2.5時間×35週＝87.5時間となる。一方，大学では授業時間の２倍の自宅学習を要請しており，（週１コマ1.5時間＋自宅学習1.5時間×２)×半期15週＝67.5時間である。半期では高校数学を復習するのも大変である。伝統的大学教育のスタイルに固執したくても，それ以前の導入教育を大学数学の場で教授しなければならず，したがって数学教育からの配慮が不可欠であり，効率よく教育することが求められるわけである。大学での数学教育の新しい流れの源泉を大学設置基準の大綱化以降とする論が多いが，少なくとも本学の場合は前回の高校数学学習指導要領の改訂時に遡及するのである。

３．教養部を持つ国立大学の一般教育は，

(1)　旧制高等学校の伝統の延長線

(2)　高校教育と専門教育の狭間

によって特徴づけることができ，数学教育もまたその例外ではなかった。高校数学の繰り返しの拒否，そして受験数学との絶縁にこそ大学で学ぶ数学の価値を求めた一部の学生の声に便乗し，高校数学と大学数学の差異をことさら強調することによって，自らの存在価値を見いだそうという傾向が教師側にあったことも否めない。

藤田宏（教育課程審議委員)[5-1]は数学教育の在り方について，次のように述べている。

> 数学教育の目的は標語的に“数学的知性の涵養”にあると言いたい。数学的知識と対比して数学的知性を重んじたい，知識の広さや計算の技巧(techniques)よりは，知性的に数学を生かす能力を重んじたいとの主旨である

数学的能力を排他的でないことを断った上で，２つの成分

ＭＴ：数学的思考力（ability of mathematical thinking)

ＭＬ：数学的活用能力（mathematical literacy)

に類別している。

ＭＴは，伝統的にすべての数学教育論で重視されてきたものであり，必要な場合に深い省察と独創的発見が期待できるような思考力として定義している。その上で，

> 日本の制度，実状の中では，能力差に厳しく応じて行わねばならないＭＴの強化は，“今どれだけのことが考えられるか”よりは“将来のための思考力の強化をどれだけ果たせるか”課題としたい。

と述べている。人間の能力には優劣の差を認め，出来ると出来ないがあるのは当然であり，“すべて”の内容を“すべて”の学生に理解させることは不可能であるという「能力主義論」の鎧が見え隠れしている。エリートのための英才教育の肯定論である。しかし，この論は教育の理論としては認知を受けていない。なぜならば，出来る出来ないは結果であって，教育は発達の過程を問題としているのである。数学“教育”とするならば，「能力差に厳しく応

じて行わねばならない」の部分は，もっと丁寧に検討し記述すべきであろう。

ＭＬについては

> 狭義には数学の読み書き能力，すなわち，必要な場面で数学を言語として，操作できる能力……より広い意味の“知的なユーザーの数学”活用能力

と定義している。大学数学についても書かれており，

> 大学の専門学部での数学教育は数学科を除けば，その専門分野での「数学のユーザー的な使いこなし能力」，すなわち，その分野での数学的リテラシーの教授を目的とする

と位置づけている。

本学の教養課程では，教科書を数学教室の責任で選定し，非常勤講師も含め学科単位で統一した教科書を指定してきた。数学教室で完全に合意をみたわけではなかったが，筆者は究極的には「微分積分」を含め高校数学を十分に学ばないできた済ませてきた学生に対する数学教育（学部学科を越えて横断的教育）は，伝統的大学教育の在り方，すなわち，とは全く相反し，マニュアル化された一斉授業方式を採るしかない（採らざるを得ない）と考えていた。ただし，ＭＴがあってこその数学教育で，各専門分野で必要な数学的準備すなわちＭＬのみでは，数学教育でないとの思いは常に念頭から離れなかった。そこで非数学科系の導入教育は，一般教育科目としての「数学」と，専門教育科目としての「数学」の違いを象徴的に言えば，鑑賞して楽しむ劇場型「数学」と運転が出来るようにこだわる自動車学校型「数学」の２種類が開講でき，前者は選択，後者は演習付きの必修しかも能力別クラス編成が理想であると思っている。

4．ＭＬを教育する際に，藤田宏[5-1)]は

> 数学的リテラシーは，知的な能力であるが，学習の仕方も証明主義にとらわれずに，体験的（経験帰納的）納得をよりどころとしてよい

ともあっさり述べているが，深刻な問題をはらんでいる。事実，アメリカでは既に，「数学における証明とは何か？」「証明は必要か？」と言う議論にまで進展している。証明が巨大化・複雑化すれば，すべてのステップを論理的に追従していくことが，次第に困難きわめて行くように，コンピュータのプログラムも巨大化すれば，すべての作動をチェックする事が不可能となっていく。どこかで，妥協して，理解するのでなく納得せざるを得なくなる。納得するには，言葉で解説するばかりでなく，視覚的に直観へ訴えこともまた必要となる。J. Horgan[7)]は，「証明」に関する

㋐　教育的効果としての位置づけ（ビデオ証明など）

㋑　伝統的スタイルの巨大化（有限群の分類など）

㋒　コンピュータの活用（４色問題など）

㋓　ゲーデルの不完全性定理（集合論の逆理など）

各種事例を並記しながら，William P. Thustonの説が紹介している。

アメリカのバークレーにある数理科学研究所で，Thustonは高校の数学教師と共同で学生を数学に引きつける方法を探る連続セミナーを行なっていて，その一つに，

「高校幾何学において証明は時代遅れか？」

があった。このセミナーに参加した数学者たちは

「結論が正しいことを保証するには証明がぜひ必要だ」と当然の主張したのに対して，大多数の高校教師たちは

「学生たちは，伝統的で公理主義的な証明がビジュアルな説明より納得できるものだと思っていない」

「もはや“証明”など（学生は）自分には関係ないと考えているし，重要なことだとも思っていない」と反論があったと報告されている。たぶん日本でも同様であろう。

ところで「指導要領の展開」[5)]では，

①シミュレーション

②アルゴリズム（算法）を理解しながらプログラムを自作

③数式処理システムなどの既成のソフトウェアの利用の熟達

をあげている。コンピュータの数学教育への活用は，多量な計算をさせて見せることが本義ではないことでは一致をみているものの，執筆者によってその軽重の仕方，理解の仕方が各人各様であり，この分野の未成熟さを伺わせる。

①について，概念把握，動機付け，事実認識としての利用から，数値実験や図形観察を通して，発見的考察に利用へ発展させて始め本物であろう。しかし現状では，あらかじめ与えられたプログラムで数値実験して，“数学的な見方や考え方のよさ”を“分かったつもり”にさせることが出来れば導入に成功とすべきであろうが，“分かったつもり”が曲者なのである。証明を“分かったつもり”は学習の動機付けになり得ても，“分かる”とは全く異質である。厳密な証明を止める換わりに，証明を理解するのでなく定理を使えるようにするのが目的であったとしてもである。

「先生の説明を聴いているとき，解き方は“分かったつもり”なのに，いざ自分で解いてみようとすると，解けない」

「コンピュータの画面を観ているとき，“分かってたつもり”のはずなのに，いざ自分で考えてみようとしても，考える手がかりがない」となるのである。

そこで②が肝心となる。主人となってコンピュータを駆使する経験は貴重である。森本光生[5-3)]が指摘するようによほど時間を掛け丁寧に取り扱わないと，（伝統的な）数学教育でなく，プログラミング教育になりかねないが，それはそれでよいのかもしれない。

当面は③となるが，数学的理解が不十分な者には“猫に小判”である。関数電卓を（たとえ任天堂世代の）小学生を渡しても＋－×÷以外のキーをどれほど利用するのであろうかを想像すれは明かである。

5．共同声明「数学教育の危機を訴える」の批判を通して問題点をあぶり出そう。

1）〈学校教育，特に中学校における数学の十分な授業時間の確保〉

要求理由の論理的展開を模式化すれば

「授業時間数が少ない」

➡「内容の不消化」➡「落ちこぼれ」➡「数学嫌い」

➡「理系科目全体の不人気」➡「理系離れ」

と，驚くほど短絡的発想・思考で，唖然となる。中学校を強調する理由を，「計算規則等の暗記・習熟による学習とは質的に異なる，論理，抽象など数学的思考の本質的部分を用いた理解の方法が本格的に導入」期であるからとしている。現状の一斉授業の形態のままで時間数を掛ければ掛けただけの効果が上がるのは「計算規則等の暗記・習熟による学習」であって，「数学的思考の本質的部分を用いた理解」に付いては懐疑的である。具体的問題を論理的思考し表現していく訓練は国語教育，外国語教育にもかかわる学校教育全体の問題であろう。

2）〈ゆとりのある，楽しい数学教育で，すべての生徒に十分な数学的リテラシーを〉

「数学は理系向き」との常識からの脱却し，広くすべての人々が十分な数学的素養を身につける必要がある。(しかし)……学習内容の量的増大による詰め込み教育に陥ってはならない。……題材の絞り……学習をより深める……数学の諸理論を理解し使いこなす能力としての数学的素養（数学リテラシー）を育成することを主にする……数学の授業が多くの生徒にとって苦痛である状態は，<u>生徒にとってもまた数学自身にとっても不幸</u>である。ゆとりがある……楽しいものにならなければならない

とある。アンダーラインの箇所で，なぜか“教師にとっても”が欠落している。“多くの生徒にとって苦痛である状態”が数学教師にとって幸福であるわけはない。“生徒が出来ない”ことを喜ぶ教師がいないのは当然，故に省いたのであろうか。釈然としない。声明執筆者の超然性を露呈している。“楽しい”数学教育と“楽しい数学”教育は意味が違う。“楽しい”数学教育は“楽な”数学と誤解を受ける。すべての生徒にMLを身につける学校とは，あたかも自動車の運転免許を習得させる自動車学校を連想させるが，そこはゆとりとか楽しさとは無縁であった思いしか筆者にはない。自動車学校は自動車の仕組みを教えるのでなく，運転の技術を教える。卒業すれば(ほとんどの生徒は卒業する)，公道で運転が出来る。学校数学を学んで卒業したら，どのような数学が出来るようなるのだろうか。数学・物理での高校生に対して大学教育を先取りさせる「英才教育」のパイロット事業が7月14日に文部省より大学等（東工大，名大，京大，広大，都大，早大など）の8機関に委嘱したこの時期に，“すべての”生徒にとするにはしかるべき教育哲学がいる。物理学会はこれに対する批判を表明しているが，遠山啓[8)]の論を思い出す。

英才教育のためには入念な質の高い凡才教育を行うべきであり，凡才教育が高くなれば，英才は自然とその中から現れるだろう。……凡才教育の充実することを忘れ

た英才教育は空中楼閣にすぎないし，やがては失敗するにほかならない

数学教育に携わる集団として，もっと丁寧な記述があってしかるべきである。

3）〈小・中・高一貫した体系的教育カリキュラムの検討を〉

数学は体系的学問であり，多方面な諸概念を体系的かつ発展的に学ぶ必要がある。

体系化においては，生徒側の数学に対する認知・学習過程が十分考慮すべき

としている。“証明は死んだ”に対する認否はさておき，現状で，先験的に数学は体系的学問でありと押しつける論には無理がある。まして，学習過程では，数学理論体系の閉鎖世界に閉じ込もってはならず，数学の歴史的発展経緯や応用数理への軽重なども十分に考慮にいれるべきであるはず。体系化は効率化とは無縁でない。体系化すると教わったことを必ずすべて身につけていることが前提となっていく。「1年で1割，2年で2割，3年で3割，4年で4割，5年で5割，6年で6割」と言う言葉がある。小学校の算数についていけない子供達の状態を標語的に述べたものである。数字に多少の誇張があっても，大学教育まで，この傾向（落ちこぼれ数の単調増加）が続くのである。敗者復活は皆無である。原因は富士山型体系的教育カリキュラムにある。富士山を登頂する体力がない場合，永久に山頂に立てない。挫折するとやり直す機会を与えないし，体力にあった山選びを許さない。アルプス連山型カリキュラムを創造するべき時期である。“一貫”という用語は禁語だ。

4）〈主体的学習による楽しい数学教育を，そのためにコンピュータの積極的活用を〉

数学的対象を生徒が自ら主体的に取り扱う中で，楽しみながら創造的の力を培うことである。……コンピュータがきわめて有効な手段を与え，……より積極的な活用，……技術開発・教育環境の充実をはかるべきである。

とある。コンピュータの活用とは何を意味しているのだろうか。数式処理システムでは，高級グラフ機能付き関数電卓であり，計算のブラックボックス化が避けられない。「計算も死んだ」とすることにならないか？むしろ四則演算しかできない電卓を渡し，平方根・対数・三角比などを工夫して求めさせた方がよほど数学的である。前述した通りプログラムも作らせればよいが，伝統的な意味での数学教育ではなくなる。

5）〈生きた数学的センスを十分に備えた教員の養成・採用を〉

生徒の数学的思考能力を育成するためには，数学の基本的考え方をきちんと理解し，十分な数学的センスを持った教員がその教育に当たらねばならない。……十分な数学的素養を大学で身につけた優秀な教員の採用を増やす……新規採用数を増加すべく，少人数教育の推進等何らかの方策を講じる……現職教員が現代数学の基礎的知識を充実させ，数学的センスを磨き……研修の場の拡充……

「新規採用数を増加すべく，少人数教育の推進」とは本末転倒な主張である。凡人教育，双方向授業を実現するには，講義ばかりでなく問題演習が不可欠な数学においては，少人数教育が推進を主張すべきである。数学の楽しさを教えるのはコンピュータではなく，人である。

6）〈大学入試における数学の重視と改善を〉

要求理由の論旨を模式化すれば，

「入試で数学を課さない」➡「高校の数学授業時間数の減少」➡「大学生の数学能力低下」➡「大学教育レベルの維持が困難」➡「論理的文章が書けない」

声明の論理水準をみれば，言わずもがなである。

受験生のレベルの変化には，数学を受験科目からはずすのでなく，出題レベルの変化により対応することが望ましい

とは，「数学」を支えるのが「受験数学」とするならば寂しい限りである。「受験数学」はエリートの選別，落ちこぼれへの差別の道具（フィルター）として用いられてきた経緯に対する自己批判・自己評価が完全に欠如している。

6．数学＝論理的が暗黙の前提となっている。数学の証明は論理的に記述されている。論理的に思考しなければ，証明は読解できない。従って，論理的であれば数学が得意である。逆に数学を学べば，論理的思考の訓練がなされる。これに疑念をはさむ者はほとんどいなかった。

条件的推論 (IF … THEN …) が数学の学習には不可欠であることは論じるまでもない。児童心理学者 Jean Piaget は，

子供の思考がある発達段階に達すると，主観でも客観でもない更にそれらの背後にある第三の立場を認知して条件的推論を可能とするようになる。そして，すべての数学的推論はこの条件的推論と考えることが出来る

として，子供が発達に従って獲得する条件的推論の仕方は，数学的推論と同一であると考えていた。ところが，Thomas C. O'Brien は，日常では，条件的推論として数学的推論とは異なる推論を用いている場合がしばしばあり，数学の指導上配慮すべきであることに気が付いた。それは，本命題“A ⇒ B”が真であれば，併せて裏命題“—A ⇒ —B”を常に真であると思い込む，Child's Logic とよばれる論理推論である。名称から推測が付くように数学的推論を獲得する発達課程の中途段階と考えられれいる。

ところで，プログラム言語では，Aが成立する場合のみ新規にBが成立するとしているので，Aが不成立の場合，Bは全く考慮外である。したがって，Bを考える以前の段階，すなわち，実質的にはBが不成立となる。

“晴ならば遠足に行く”としたときは，いつもは遠足に行かないことが前提であり，特別に晴れたら遠足に行くことを規定している。したがって，雨降りならば，無理して遠足に行かないのは当然である。

松尾吉知[8-1]はO'Brien の研究に応じて，日本における調査を実施した。そのとき論理の型を分類し，学業成績との相関があるとの想定のもとで，考察を行った。ところが予想に反して，

「数学の学業成績に対して，数学的推論を獲得した生徒とChild's Logicの生徒とでは，有意差は検定できない」
との結論を得てしまった。調査内容に不十分な点があり，批判的再調査・再評価をすべき点もあるが，この結論は深刻な問題を投げかけている。

数学は，論理的でないと出来ないはずと信じていた。だが，学校数学は違うと断じるのは言い過ぎにしても，「計算は好きだが，証明ぎらい」が多数いることとよく符合する。

藤田宏[5-1]は

数学の確かさ（certainty）は，誰が実行してもおなじ結果を与える計算，筋を追うことさえできれば万人が納得する論証によって象徴される。これらは，中・高等学校段階において十分理解できるものである。人間的な価値観の多様化している時代に生きる生徒であるだけに，数学の明解さと確かさに触れさせることは意義深い

と楽観的に述べているが，次の松尾吉知の知見と対比してほしい。

どの生徒（学生）も論理的に同じ土俵の上にいるように考えて，教育を進行することは厳に戒めねばなるまい

本質的に数学的論理が必要としない問題（計算）演習が大半を占めている現状では，小中高の算数・数学教育では数学的推論が身に付かないのであろう。

面白い例をあげておく。“微分可能ならば連続”を教えたとき，Child's Logicの学生は“微分不可能ならば不連続”思いこんでしまうはず，だから，“連続だが微分不可能な例”を示しておく必要があると多くの数学教師は考える。（筆者も考えていた）しかし上記考察にあるとおり，学生は，“連続な関数を対象に微分可能性を調べ，微分の計算をする時点では不連続関数を対象にしていず”，はじめから不連続とは思い至らないのである。Child's Logicを数学的論理的に使うのでなく，Child's Logicとして使っているのである。

7．小中高の算数・数学教育では数学的論理が必要としない問題（計算）演習が大半を占めている現状を如実に反映しているのが，公文式[4]学習である。夏の特別学習の新聞広告に教育理念が整理されて，掲載されているので，引用が長くなるが，広く小学生を子供に持つ親に共感を呼ぶ広告であることを念頭に入れて，数学に関連するところを抜き書きして分析する。

まず大活字で，

「小学生のうちに，どんな勉強をしておけばいいのだろうか？」

との問いかけからはじまる。活字のポジを落として，

「中学，高校と進むにつれて必要になってくるのはどんな力？」と重ねて尋ね，

「数学に関しては，文字式や方程式，因数分解などの代数計算がたっぷりと登場し，小学校段階での計算力（早く正確に解く力）養成の必要性を強烈に思い知らされます。公文式では，全教科の勉強に直結する読解力と，数学で求められる計算力について，何がなん

でも小学生のうちにしっかりと鍛えておかねばならないと考えます」と断定する。

確かに，初等的なレベルでの代数学の使用は多くの単純化をもたらし，思考の節約になる。小学校の算数の応用問題を思い出してみれば明白である。代数による解答は計算の法則をあらかじめ設定された形式的な手順の適用しているのに過ぎないのである。一方で，テレビ番組「平成教育委員会」で取り上げられる中学入試問題や，講談社のブルーバックス数学関係書に算数の難問・奇問では，代数的計算とは質を異にしているのが広く受け入れられている。代数化は“数学が出来た”記憶が残すが，“数学が好き”を助長するかは疑念が残る。広告では続けて，

「そのためには，どんな勉強を？」と尋ねる。そして，

「学年が進むにつれて，基礎学力と共に必要となってくるのは，自分で勉強する力。いわゆる自習力です。いちいち人から説明してもらわなくても，自分で考え，自分で解いていけるだけの能力が育っているかどうかは，将来の伸び方を決定づけます。公文式では，必要以上に手とり足とり教えてもらう勉強方法を否定します。子ども自身が，ここなら解けるという内容を自分で解き，少しずつそのレベルを上げていく『自学自習』の勉強法を，小学生の内から習慣化しておくべきだと考えます」と持論を展開していく。

事前に構成された系統的教材の山を各自のスピードで登っていく。共同声明で提唱していた“小・中・高一貫した体系的教育カリキュラム”と公文式の教材とは，同類なのかもしれない。『自学自習』とは，数学教師の存在否定である。では，教師から丁寧に説明してもらわなくて，（自分で考え，自分で解いただけでは）身に付かない能力とは何であろうか。そして，そのような能力を強化せねば，理解できないような数学のカリキュラムとは何であろうか。これに対する的確な答が出来ないと，学校数学は公文式の軍門に下りかねない。ひとまず，先を読み進もう。

「ひとりひとりの現在の力に合わせて，将来役立つ学力づくりを」と，提案して，

「学年毎に教える一斉授業，これに私たちは疑問をもっています。すべての子が教わったことをすべて身につてているとは限らないのに，一度に同じことを強いたって，出来る子には飽き足らないし，できない子にとっては苦痛でしかありません。せめて，家庭では，自分の学力にぴったり照準を合わせた勉強を行いたいものです。どこまできていて，どこからあいまいになっているのか。公文式は，お子様の力を正しく見極め，出来ることから少しずつステップを上げていき，やがて学校でもまだ習わないような問題でも解きこなせるほどたくましい学力を着実に育てます。」で結ばれている。

共同声明とは異なり，コピーライターの手を経ているだけあって，公文式の数学教育観が明解に平易な言葉で披瀝されていて，数学の専門家を除外とすれば，賛同される者が多数を占めることが納得できる。算数・数学に焦点を絞って，折込広告では，

「算数好きへの最短コース　確かな計算力を育てます」を強調して，

「お子さまのラクにできるところから始めて，くり返しくり返し少しずつレベルアップ

していく公文式。教材が進むほどに早く正確な計算力が身につきます。この計算力は小学校の算数のかなめであると同時に，中学・高校数学の大部分を占める代数計算の基礎となる大切な力。公文式算数・数学で取り組めば，小学校の算数はもちろん，学年が進むにつれて大きな力を発揮します」とある。

ここに公文式がなぜ興隆するのかを解明する鍵が隠されている。現在の学校の数学教育を否定をよそいながら，実は学校数学の場で評価をうけ，“大きな力を発揮”を拠り所としている。学校数学と公文式とは外観はともかく，内実は同類なのである。

公文式の特徴は自己採点にあり，それを可能とするのは採点のしやすさにある。一方で入試問題は採点作業の軽減，公平さが不可欠である。両者は代数化された計算問題そしてあらかじめ設定された形式的な手順の適用しているのに過ぎない穴埋式問題に収斂していく。そこには意識的な論理的思考を要求していないのである。ここに公文式の限界がある。それを承知の上で，従来の学校教育よりもML学習に関しては効率が良い点に着して，能力別クラス編成とともに，公文式学習を導入しようと筆者は考えていた。再履修クラスに対し数年来試行してきて，比較的好評であった。だが本格的実施以前に教養部を解体した。

一松信[5-2]は

> （微分積分学での計算の大半は代数的計算であり，極限の概念自体はほとんど不要，だから計算機の数式処理が可能となり）その種の計算を十分に体験することによってはじめて基礎への反省もされ，ひいては抽象的思考の素地も育つ点を強調したい。その意味で小学校での分数計算の練習に次ぐ「第二の算数」的な性格を有する

と述べている。公文式の広告と実に酷似している。

数学教育現代化は公理主義の導入を伴い，形式的証明とともに代数化を捉進した。現代化そのものは否定されたが，今度は数式処理システムの発展が代数化を加速させている。平明に計算できることが，場合によっては，論理的思考の訓練や独創力の発揮を阻害することを指摘したい。

8． 数学教育学で問題にされる点を，

(1) 目的論　　　　　：なぜ数学を学ばねばならないのか？
(2) 教材論　　　　　：個々の教材がどの様な価値を有し，取り扱うのか？
(3) カリキュラム論：教育の過程に各教材を程度でどの時期にどの配列するのか？
(4) 指導方法　　　　：実際の授業をどの様に展開するのか？
(5) 学習心理　　　　：学生/生徒の側はどの様に受けとめているのか？
(6) 評価　　　　　　：指導結果をどの様に読みとり，それ受けての対処の仕方は？
(7) 歴史　　　　　　：上記の各項がどの様に変遷してきたか？

と整理して，「数学科教育法」では学ぶ。しかし文部省の学習指導要領の枠組みのもとで，現象を解析するには役に立つが，指導要領を離れ新しい教育を創造にはあまりに分析的す

ぎる。遠山啓[6]は，より総合的に数学教育を考えようとして，

①現代数学

②認識の巨視的発展（数学史的立場）

③認識の微視的な発展（心理学的立場）

の３つの立場を提唱した。近年のコンピュータの急速な発展は人間生活を大きく変え，大学教養程度の数学の（代数的）数式計算やグラフを描き出すこと，さらには易しい初等幾何の証明もパソコンで可能となっていくであろう。したがって，筆者はさらに第４の立場

④応用数理（電卓・コンピュータの活用を含む）

の追加を提案したい。４つの立場から大学数学教育（微分積分学を中心に）における ε—δ 論法を考察してみる。

微分・積分の基礎となるのは，極限の概念と無限の取扱いにあるが，歴史的にはそれらを論理的に破綻なく厳密に記述するために，長い試行錯誤の末に ε—δ 論法で記述されるに至った。ε—δ 論法を正確に理解するためには，実数とは何かを精緻に認識することといたるところに出てくる論理的推論が不可欠となり，その理解は辛抱と努力の後にやっと獲得できる。ところで藤田宏[5-1]は

極限は無限操作を通じて理解される概念であり，直感的であり得ても日常的でない（にもかからわず，）幸い多くの生徒（高校生）にとって理解の範囲にあり，慣れるにしたがって，実存感を持ち得るものである

と述べている。現実は，多くの理工系の大学生にとって ε—δ 論法は理解を越える範囲にあり，慣れることはなく実存感を持ち得えないものとして，次第にカリキュラムから追放されてきている。ε—δ 論法を削除すれば，微分積分学は「第二の算数」の地位に止めるおかる。これでよいのかとの思いは残る。極限操作が，種々の定理の証明に登場するが，ε—δ 論法を使えないとすると，直観的な近似状況の把握から定式化するわけである。電卓やパソコンが不可欠となる。しかし無限操作は表から隠れてしまいほとんどの学生は意識しなくなる。そして ε—δ 論法よる証明をすべて省略していくと，解析らしさはすっかり消え失せてしまう。

細井勉の詳細な研究[10]があるが，ここでは，遠山啓の類別を適応して ε—δ 論法を考察してみる。

①現代数学の立場：微分積分学はニュートンとライプニッツによって発見された以降，自然現象の記述言語として，応用と直結する形で発展する一方で，数学理論としては，ε—δ 論法による厳密な実数論の展開を柱としている。これを理解せずとも，触れる機会を奪うことはもってのほかである。

②認識の巨視的発展(数学史的立場)：微分積分学が発展していく過程で，曖昧な表現や論旨で奇妙な結論を得たりを繰り返し，思考錯誤の末に確立してきたのであり，先験的に準備されたものではない。ε—δ 論法を出発点とはせずに，ある程度進んで必要に迫られてから回帰すればよい。

③認識の微視的な発展(心理学的立場)：高校数学までは，直観を主とし計算重視で，論証的な内容を避けてきているのだし，計算練習やいろいろな定理や理論を知識として教えた方が効率的である。

④応用数理(電卓・コンピュータの活用)：極限の概念を近似の概念で置き換える。公式・定理をある程度は先験的に導入して，定理の活用に絞って解説していく。計算練習は数式処理システムを利用し，論理的に追求するより帰納的あるいは確率的態度で知識を修得させていけばよいとなる。

微分積分学講義では$\varepsilon-\delta$論法が定食であったのは過去の話で，学生の学力に従って，①→②→③と変遷し，今後は④への志向されている。学生が$\varepsilon-\delta$論法が分からないのは，高校数学の準備が不十分，すなわち未修得の「微分・積分」を補足するのに手間取り，肝心の$\varepsilon-\delta$論法まで辿り着かないことが原因とされてきたが，実はほとんどの学生の論理思考が数学的でないことが最大の原因であることを指摘しておく。

9．一般に数学書の陳述は，行間を読む数学オタク族にはともかく，字面しか読まない者にとってはなかなか難しい。たとえば「AはBである」の単純な文にも隠れた難しさがある。

細井勉[8-2)10)]は意味を汲むと，

① $A=B$　要素として一致
　　　　　集合として一致（述語論理が隠れている）

② $A \subset B$

③ $A \in B$

と3通りに分類した。例えば，「微分可能な関数は連続関数である」は②，「この微分可能な関数は連続関数である」は③，「前出の微分可能な関数はこの連続関数である」は①の前者，「微分可能な関数はこれらの連続関数である」は①の後者と解釈できる。

細井勉は見落としているが，事情はもっと複雑である。大野晋[1)]によれば，助詞“ハ”は題目とする言葉を承ける。あるいは既知であるものを承ける。助詞“ガ”は未知のものを承ける，あるいは承けるものを未知のものとして扱う。

例えば，「AはBである」とある場合，Aは既知でBは未知となり，それを念頭におくと，逆は「BがAである」となる。「BはAである」とすると既知と未知は反転してしまう。

そこで「微分可能な関数が連続関数である」の表現について考えてみよう。微分可能か否かは未知であるが，そのような関数が連続関数を尽くすのであるとも解釈できる。従って，この命題は偽と考えても，誤りであるとは言えないのである。

「連続関数が微分可能な関数である」は，“すべての”を連続関数の前に冠すると既知となり，ガが承けにくい。となると，“すべての”が付かないのでこの命題は真と考えても，誤りではないのである。

この様な困乱は命題論理では既知・未知の区別がないことに起因する。ところで定理を応用するときには，既知・未知は本質的な部分になる。事実，関数が微分可能であると分かっている場合は，連続性をいちいち調べなくてもよいし，また不連続のときは始めから微分を調べる必要はない。要するに「AがBである」と「AはBである」とは同値ではないのである。

既知・未知の概念は時間軸のもとに導入される。ところで，数学的論理には，時間軸がないが，一方で，実際の日常は勿論，数学の応用でも時間軸があるのが普通である。6節で引用した松尾吉知[8-1]のアンケート調査ではこの時間軸に対する配慮がなされていない。

日常の“近づく”という概念には時間軸が入っているが，ε—δ 論法からは排斥されて，静止的表現になっている。ε—δ 論法を難解にする一因であろう。εを 0.1, 0.01, 0.001,... と順にとって具体的に δ を定める数値実験は，ε—δ 論法に時間軸を入れることになり理解し易くなるように見える。しかし近似的解説はε—δ 論法とは異質である。ただ，応用に限定すれば，異質のままの方がかえって自然なのかもしれない。

10. 問題提起に思いがけず，紙幅を費やしてした。調査・検証の報告は次稿に譲る。数学教育研究者集団でありながら，自己組織のあり方の研究（数学教育）を放棄した結果が〈数学教育の危機〉である。数学する意義や楽しさを伝える努力を怠ったツケだと指摘して本稿をしめくくる。

参考文献

1）大野　晋：日本語の文法を考える　岩波新書　(1979)
2）大学での数学教育の新しい流れ　数学　**46**,（1994）：宮西正宜・板根由昌　164—170（大阪大学）岡本和夫　258—262（東京大学）
3）公文　公，岩谷清水：新公文式算数のひみつ　公文式出版　(1993)
4）Robert Jaulin：“Pourquoi la mathêmatique?” Union Gênérale d'Editions, Paris 1974：何のための数学か　東京図書　1975：Rem'e Thom　(A)現代数学と通常の数学　(B)現代数学，それは教育学的，哲学的誤りか？の2編が貴重
5）正田　實，茂木　勇編：改訂高等学校学習指導要領の展開　数学編　明治図書　(1990)
　5-1）藤田　宏：第Ⅰ部 高等学校数学科学習指導要領改訂のねらい　第1章　教育課程の基準の改善と数学科　§2　数学科改訂の基本方針　27—36
　5-1）一松　信：第Ⅱ部 数学科各科目の目標と内容　第2章　数学Ⅲ　§1　目標と概観143—146
　5-3）森本光生：同上　第6章　数学C　§1　目標と概観　227—230
6）遠山　啓：教師のための数学入門　国土社（数量編）1960,（関数・図形編）1965
7）J. ホーガン：The death of proof, Science American **10** (1993)　日経サイエンス　**12**, 108—119 (1993)
8）福原満州雄編：数学と日本語　共立出版（1981）
　8-1）松尾吉知：第4章　日常論理と数学　89—103
　8-2）細井　勉：第5章　論理的な表現と日本語　106—118
9）船倉武夫：教養としての数学　高校数学と大学数学の関わり　本紀要，**29**，27—42（1994）
10）細井勉　数学とことばの迷い道，イプシロン・デルタを理解するために　日本評論社
11）竹之内脩：解析学の教育について　数学　**44**（1992）175—181

12）竹之内脩：大学における数学教育の改革　数学教育学会秋季年会発表論文集（1993）33—36
13）吉川　敦：数学科は変身を迫られている　数学　**45**（1993）186—187
14）日垣　隆：〈検証〉大学の現在　世界　岩波書店1993年連載

Mathematics as Liberal Arts

—— ability of mathematical thinking ——

Takeo FUNAKURA
Department of "kyôtsûkôza",
Faculty of Science,
Okayama University of Science
1-1 Ridaicho, Okayama 700, Japan
(Received September 30, 1994)

Most of college mathematics teachers have experience, glad to meet the feschmen with good record at the senior hight school mathematics, and, a little while, sad to find that many of them have hadly understood the mathematical logie, there by against their will, they give up introducing the ε-δ method in the first calculus. Could the "school mathematics" instructe the mathematical literacy but not teach the ability of mathematical thinking?