多目的計画法について

成　久　洋　之

岡山理科大学　教養部

（昭和56年９月25日　受理）

1.　まえがき

多目的計画問題は計画問題の目的関数が複数個存在する場合の総称である．線形計画問題あるいは非線形計画問題等のような従来取扱われてきた数理計画問題はいずれも単一の目的関数からなる計画問題である．複数個の目的関数が存在することはすなわち複数個の評価尺度を有しており，決定問題における規範的な決定論的な論義が単一尺度を持つ場合のように簡単にできなくなる．

本来，計画問題は決定者の最終計画立案のための科学的決定理論として考えられてきたが，決定そのものは科学的であると否とに無関係になされるものであろう．しかしながら，不確定要素が多い状況下での政策決定あるいは計画決定というのは神様でない限り仲々難しいものである．決定の状況ではそれを取りまく諸環境が厳しい程困難なものとなる．一般にこれらの計画にかかわる諸条件は競合的なものが多い．これまで，この種の決定問題を単一の目的関係で取扱えれる範囲内で展開してきただけであり，本来の目的関数はある種の計画策定に当っては多数の観点からの尺度で分析しなければならないものであろう．つまり計画問題における諸条件が競合的であるばかりでなく，目的関数自体もお互いに競合的に存在しているのが現実問題の実態なのではなかろうか．この意味で，従来取扱われて来た数理計画問題は単一の評価尺度で処理できる範囲内の問題を扱っていたに過ぎない．このことは決定者としては従来の計画問題に対する最適解が求められたとしても，それをそのまま自分の最終決定計画とすることはできなかったはずである．あくまでも参考資料程度にするしかなかったかも知れない．理由としては他の諸々の曲面を検討して最終的な計画決定をしなければならないからである．つまり決定における総合判断を要求されるからである．

現実に生起する各種計画問題で，複雑な生産計画あるいは行政上の問題などはいずれも複数個の評価基準を有しており，これらの中で決定者として採るべき行動の選択を強要される場合が多い．工場経営者にとっては利益，販売，在庫，労働などの諸要求を同時に供えた生産計画を追求しなければならないであろう．このように現実の計画問題はいろんな角度からの尺度で評価し最終計画として決定すべきである．

多目的計画問題は与えられた条件のもとで複数個の目的関数を満足するような解を求

めようとするものである．いま，n 次元変数ベクトル x の関数 $f^1(x)$, ……, $f^l(x)$ を l 個の目的関数とし，$g_i(x) \leqq 0$ $(i=1, \ldots\ldots, m)$ を m 個の条件式としてみると多目的計画問題はつぎのように定式化される．

$$\left.\begin{array}{l} \text{Opt.}\quad (f^1(x),\ f^2(x),\ \ldots\ldots,\ f^l(x)) \\ \text{subject to} \\ \qquad g_i(x) \leqq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m) \\ \qquad x \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

この問題では目的関数が l 次元ベクトルで与えられていることに注意していただきたい．つまり条件付ベクトル最適化問題となっている．評価基準がベクトルであるから，最も良いベクトルということはできない．すなわち望ましいベクトルを求める問題となる．(1)の条件式を満足するものを実行可能解（feasible solution）といい(1)の解を有効解（efficient solution）という．有効解はパレート解あるいは非劣解とも呼ばれるが全く同じ概念である．本論文では有効解と呼ぶことにする．

有効解とはある与えられた解集合の中で，それより有効な解は存在しない解のことをいう．(1)の問題で，

$$X=\{x \mid g_i(x) \leqq 0\ (i=1,\ \ldots\ldots,\ l),\ x \geqq 0\}$$

$$f(x)=[f^1(x),\ f^2(x),\ \ldots\ldots,\ f^l(x)]^T$$

とするとき，$\bar{x}$ が(1)の有効解であるとは

$$f(x) \geqq f(\bar{x}),\quad f(x) \neq f(\bar{x})$$

となる x が X の中に存在しないことを意味する．

この有効解の定義より，有効解は唯一ではない．有効解の集合を N とすると，(1)の問題は $x \in N \subseteq X$ を求めるものとなる．

$$\Lambda=\{\lambda \mid \lambda \in E^l,\ \lambda_k \geqq 0,\ \sum_{k=1}^{l} \lambda_k=1,\ k=1,\ \ldots\ldots,\ l\}$$

として，$\lambda \in \Lambda$ が与えられたものとすると，(1)はつぎのように考えることができる．

$$\max \sum_{k=1}^{l} \lambda_k f^k(x),\quad x \in X \tag{2}$$

(2)は単一目的関数からなる数理計画問題である．つまりパラメータ $\lambda \geqq 0$ を導入することにより単一尺度の計画問題に変換できたわけである．

さらに，

$$C=[C^1,\ C^2,\ \ldots\ldots,\ C^l]^T$$

とし，C^k $(k=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ l)$ は n 次元ベクトルとすると

$$f(x)=Cx$$

となり，(2)はつぎのように表わされる．

$$\max \sum_{k=1}^{l} \lambda_k C^k x,\quad x \in X$$

また，$X=\{x \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$ となる凸領域で定義すると(2)は線形計画問題として取扱いうる．

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max}\quad Cx \\ \text{subject to}\quad Ax \leqq b,\ x \geqq 0\end{array}\right\} \tag{3}$$

ただし，C は $l\times n$ 行列，A は $m\times n$ 行列，x は n 次元ベクトル，b は m 次元ベクトルとする．

(3)を線形多目的計画問題という．(3)に対して，ある $\lambda\in\Lambda$ が与えられたとき，

$$\max\ \{\lambda Cx \mid x\in X\} \tag{4}$$

と変換できる．

本論文では(3)の有効解集合 N と(4)におけるパラメータ集合 Λ との間の関連性を明らかにし，N を求める解法につき論述するものである．さらに，有効解の感度分析により有効解であるための変動範囲を明確にし，多基準単体法とパラメータ集合 Λ の分割により有効解を求めようとするものである．

2. 多目的計画とパラメータ空間

多目的計画問題は与えられた実行可能領域におけるベクトル最適化問題であるのでつぎのように表わせる．

$$\text{Opt}\quad f(x),\ x\in X \tag{5}$$

ただし，$f(x)=[f^1(x),\ f^2(x),\ \cdots\cdots,\ f^l(x)]^T$，$x\in E^n$，$X=\{x \mid g_i(x)\leqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\}$ とする．

(5)において，

$$f(x)\geqq f(x^0),\ f(x)\neq f(x^0) \tag{6}$$

となるような x が X の中に存在しないとき，$x^0\in X$ は有効解であるという．$N=\{x^0\}$ とすると(5)で表わされる多目的計画問題はこの N を求めることである．以後の記述において，(6)の関係を(7)のように略記する．

$$f(x)\geq f(x^0) \tag{7}$$

$$\Lambda=\{\lambda \mid \lambda\in E^l,\ \lambda_k\geqq 0,\ \sum_{k=1}^{l}\lambda_k=1,\ k=1,\ \cdots\cdots,\ l\}$$

とするとき，ある $\lambda\in\Lambda$ に対し，$P(\lambda)$ を定義する．

$$P(\lambda)\,;\ \max\ \sum_{k=1}^{l}\lambda_k f^k(x),\ x\in X$$

x が $P(\lambda)$ の解であることを $x\leftarrow P(\lambda)$ と記述する．

$$S=\{x \mid x\in X,\ x\leftarrow P(\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$$

$$\underline{S}=\{x \mid x\in X,\ x\leftarrow P(\lambda),\ \lambda\in\text{Int}\ \Lambda\}$$

ただし，Int Λ は Λ の内点とする．これらの集合に関してつぎの包含関係が成立する．

$$\underline{S}\subseteq N\subseteq S \tag{8}$$

補助定理 1　ある $\lambda\in\Lambda$ が与えられたとき，$\bar{x}$ が $P(\lambda)$ の唯一の解であれば，$\bar{x}\in N\cap S$ である．

(証明)　$\bar{x}\notin N$ であると仮定すると，$f(x)\geq f(\bar{x})$ となる $x\in X$ が存在する．このことは

$\bar{x}$ が $P(\lambda)$ の唯一の解であることに盾矛する．　　　Q. E. D.

(5)で与えられる多目的計画問題を線形多目的問題とすると(3)で表わされる．そこで $\lambda\in \Lambda$ が与えられたものとするとつぎの PL を定義できる．

$$PL;\quad \begin{cases} \max\ \lambda Cx \\ \text{s.t.}\quad Ax\leqq b,\ x\geqq 0 \end{cases}$$

この線形計画問題 PL の解集合に関して Yu の定理が与えられている．

定理 1　PL の解 x^* の集合を $X^*(\lambda)$ とするとき，

(i)　$\bigcup_{\lambda>0} X^*(\lambda)\subseteq N\subseteq \bigcup_{\lambda\geq 0} X^*(\lambda)$

(ii)　$X^*(\lambda)$ の凸包が $\lambda\geqq 0$ に対し単一要素であれば $N=\bigcup_{\lambda\geq 0} X^*(\lambda)$

となる関係が成立する．

ここで，$N^>=\bigcup_{\lambda>0} X^*(\lambda)$，$N^\geq=\bigcup_{\lambda\geq 0} X^*(\lambda)$ とすると，定理 1 の (ii) より，つぎの包含関係が成立する．

$$N^>\subseteq N\subseteq N^\geq \tag{9}$$

(8)と(9)とは本質的に等価な関係を示している．(9)が錐体につき表わしているのに対し，(8)は錐体における超平面につき記述しているだけである．

ある $\lambda\geqq 0$ が与えられたとき，

$$\max\ \{\lambda Cx\,|\,Ax\leqq b,\ x\geqq 0\} \tag{10}$$

に対する双対問題はつぎのようになる．

$$\min\ \{\pi b\,|\,\pi A\geqq \lambda C,\ \pi\geqq 0\} \tag{11}$$

双対定理における最適条件よりつぎの関係が成立する．

$$\begin{aligned} &\pi A-\lambda C\geqq 0\\ &x(\pi A-\lambda C)=0\\ &\quad Ax\leqq b\\ &\pi(Ax-b)=0\\ &\quad x,\ \pi\geqq 0 \end{aligned}$$

したがって，$\lambda\geq 0$ が与えられたとき，$x^*\in X$ が(10)の最適解であるための必要十分条件は

$$\left.\begin{aligned} &Ax^*\leqq b\\ &\pi A+\lambda C=0\\ &\pi(Ax^*-b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となる $\pi\in E^m$，$\pi\leqq 0$ が存在することである．

(10)の活性条件式を表わす添字の集合を

$$R(x^*)=\{r\,|\,A_r x^*=b_r\} \tag{13}$$

とする．ただし，A_r は A の r 行をベクトルとする．

(12)より λC に関してつぎの(14)が成立する．

$$\lambda C=-\pi_{R(x^*)}A_{R(x^*)} \tag{14}$$

ここで,

$$\left.\begin{aligned} \Lambda^{>} &= \{\lambda C|\lambda>0\} \\ \Lambda^{\geq} &= \{\lambda C|\lambda\geq 0\} \\ F_{(x^*)} &= \{\pi_{R(x^*)} A_{R(x^*)} \mid \pi_{R(x^*)} \geqq 0\} \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

と各集合を定義すると(12)の最適条件よりつぎの定義が成立もる.

定理 2 x^* が PL の最適解であれば

(i) $x^*\in N^{>}$ であるための必要十分条件は

$0\in\Lambda^{>}$, または $\Lambda^{>}\cap F_{(x^*)}\neq\Phi$

(ii) $x^*\in N^{\geq}$ であるための必要十分条件は

$0\in\Lambda^{\geq}$, または $\Lambda^{\geq}\cap F_{(x^*)}\neq\Phi$

で与えられる関係が成立する.

3. パラメータ空間の分割

$\lambda\geqq 0$ が与えられたとき, 線形多目的計画問題は単一目的関数をもつ線形計画問題となるが, パラメータ入の決定法がかなり問題である. Λ はその要素 $\lambda\geqq 0$ の正規化条件を含んでいる. この正規化条件を考慮した Λ との関連性についてのべよう.

いま, $(l+1)$ 個の目的関数が存在しているとして目的関数を考えるとつぎのとおり.

$$\boldsymbol{C}x=[\boldsymbol{C}^1x,\ \boldsymbol{C}^2x,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{C}^{l+1}x]^T \quad (16)$$

$$\boldsymbol{C}^kx=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{C}_j{}^kx_j,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l+1 \quad (17)$$

$\lambda\in\Lambda$ が与えられたとしてつぎの P_λ を定義する.

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \lambda\boldsymbol{C}x=\sum_{k=1}^{l+1}\lambda_k\boldsymbol{C}^kx \\ &= (1-\sum_{k=1}^{l}\lambda_k)\ \boldsymbol{C}^{l+1}x+\sum^{l}\lambda_k\boldsymbol{C}^kx \\ &= [\boldsymbol{C}^{l+1}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k\ (\boldsymbol{C}^k-\boldsymbol{C}^{l+1})]x \end{aligned} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{C}^k-\boldsymbol{C}^{l+1}=C^k,\quad \boldsymbol{C}^{l+1}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_kC^k=C(\lambda) \quad (19)$$

とすると, $\lambda\boldsymbol{C}x$ はつぎのようになる.

$$\lambda\boldsymbol{C}x=C(\lambda)x=\sum_{j=1}^{n}C_j(\lambda)x_j \quad (20)$$

さらに, 実行可能領域 X をつぎのように定義する.

$$X=\{x|\sum_{j=1}^{n}a_{rj}x_j=b_r,\ r=1,\ \cdots,\ m,\ x=(x_j)\geqq 0\} \quad (21)$$

$\lambda^*\in\Lambda$ を固定した場合のつぎの(22)の最適解を $x^0(\lambda^*)$ とする.

$$\max \quad P_{\lambda^*},\ x\in X \quad (22)$$

$$\Lambda=\{\lambda|\lambda\in E^l,\ \lambda_k\geqq 0,\ \sum\lambda_k\leqq 1\}$$

とし, $x^0(\lambda^*)=x^0$, $C(\lambda^*)=C^*$ と略記する. また, 基底変数の対応添字集合を J, 非基底変数のそれを $\bar{J}$ とする. 明らかに $J\cup\bar{J}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$

さらに便宜上，$J=\{1, \cdots\cdots, m\}$ となっているものとする． これは何ら一般性を失うものではない． (22)の線形計画問題を単体表で表わすと表 1 で与えられる． x^0 が非退化であれば，$x^0=(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$ となる．

表 1

				C^*_1	C^*_m	C^*_{m+1}	C^*_j	C^*_n
	基底	C^*	b^0	$x_1 \cdots\cdots$	x_m	x_{m+1}	x_j	x_n
1	x_1	C^*_1	y^0_1	1	0	$y_{1,m+1}$	y_{1j}	y_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	C^*_m	y^0_m	0	1	$y_{m,m+1}$	y_{mj}	y_{mn}
			Z^*_0	$0 \cdots\cdots\cdots$	0	$\mathbf{Z}^*_{m+1}$	$\mathbf{Z}^*_j$	$\mathbf{Z}^*_n$

この単体表では解 $x^0=(x_j)$ はつぎのようになっている．

$$x_j=\left\{\begin{array}{ll} y_j{}^0>0, & j\in J \\ 0 \quad, & j\in \bar{J} \end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Z}^*_j = Z^*_j-C^*_j \\ Z^*_j = \sum_{r=1}^{m} C^*_r\, y_{rj} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ Z^*_0 = \sum_{r=1}^{m} C^*_r\, y_r{}^0 \end{array}\right\} \tag{24}$$

x^0 が最適解であれば，

$$\mathbf{Z}^*_j = Z^*_j-C^*_j \geqq 0 \quad j=1,\ \cdots,\ n \tag{25}$$

となっているはずである． (19)より，

$$C(\lambda)=\boldsymbol{C}^{l+1}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k C^k$$

となっている． (24)より

$$\mathbf{Z}_j(\lambda^*) = \sum_{r=1}^{m} C_r(\lambda^*)y_{rj}-C_j(\lambda^*)$$

となるので，(19)の関係よりつぎのように表わされる．

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_j(\lambda^*) \equiv \mathbf{Z}^*_j &= \sum_{r=1}^{m}(\boldsymbol{C}_r{}^{l+1}+\sum_{k=1}^{l}\lambda^*_k C^k{}_r)\, y_{rj}-(\boldsymbol{C}_j{}^{l+1}+\sum_{k=1}^{l}\lambda^*_k C_j{}^k) \\ &= (\sum_{r=1}^{m}\boldsymbol{C}_r{}^{l+1}\, y_{rj}-\boldsymbol{C}_j{}^{l+1})+\sum_{k=1}^{l}\lambda^*_k(\sum_{r=1}^{m}C_r{}^k\, y_{rj}-C_j{}^k) \end{aligned} \tag{26}$$

さらに，

$$\gamma_j \equiv \sum_{r=1}^{m}\boldsymbol{C}_r{}^{l+1}\, y_{rj}-\boldsymbol{C}_j{}^{l+1}$$

$$\delta_j{}^k \equiv \sum_{r=1}^{m}C_r{}^k\, y_{rj}-C_j{}^k$$

とすると(25)，(26)よりつぎのようになる．

$$\mathbf{Z}_j(\lambda^*) \equiv \mathbf{Z}^*_j = \gamma_j+\sum_{k=1}^{l}\lambda^*_k\delta_j{}^k \geqq 0, \quad j\in\bar{J} \tag{27}$$

したがって，$j\in J$ であれば，$\mathbf{Z}_j(\lambda^*)=0$ また，x^0 で固定されれば $\mathbf{Z}_j(\lambda^*)$ は λ の線形結合となっている． そこで，$j\in\bar{J}$ において $\mathbf{Z}_j(\lambda^*)\geqq 0$ として表わされる集合は閉凸集合 $\Lambda(x^0)$ を生成する． これはもちろん，Λ に含まれるので $\Lambda(x^0)\subseteq\Lambda$ となっている．

以上のことがつぎの定理をうる．

定理 3 $\lambda^* \in \Lambda$ が与えられたとき，x^0 を $\max\{P\lambda^* | x \in X\}$ の最適解とする．そのとき，$\Lambda(x^0)$ を(28)とすれば，$\lambda^* \in \Lambda(x^0)$ で x^0 は $\max\{P_\lambda | x \in X,\ \lambda \in \Lambda(x^0)\}$ の最適解である．

$$\Lambda(x^0) = \{\lambda | \lambda \in E^l,\ \gamma_j + \sum \lambda_k \delta_j{}^k \geqq 0,\ j \in \bar{J}\} \tag{28}$$

定理 4 $x^0 \in X$ を $\Lambda(x^0) \cap \neq \phi$，$\Lambda \not\subset \Lambda(x^0)$ となるよう X の端点とする．$\bar{\lambda} \in B[\Lambda(x^0)]$(注)，$k \in \bar{J}$ は $\boldsymbol{Z}_k(\bar{\lambda}) = 0$ で軸列とするとき，すべての行に対し $y_{rk} \leqq 0$ であれば，つぎの関係を満足する有界でない多面体 $\Lambda_k \in E^l$ が存在する．(i) $\Lambda(x^0) \cap \mathrm{Int}\,\Lambda_k = \Phi$，(ii) $\Lambda(x^0) \cap \Lambda_k \neq \Phi$，(iii) $\lambda \in \mathrm{Int}\,\Lambda_k$ で，$\max\{P_\lambda | x \in X\}$ は解を持たない．

（証明） $\bar{\lambda} \in \Lambda(x^0)$ より x^0 は $P_{\bar{\lambda}}$ の最大解となる．

$\gamma_j + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \delta_j{}^i \geqq 0$，$j \in \bar{J}$ であるが，$y_{rk} \leqq 0$ であるから，$\Lambda_k = \{\lambda | \gamma_k + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \delta^i{}_k \leqq 0\}$ とすると，$\lambda \in \mathrm{Int}\,\Lambda_k$ に対しては P_λ は X の中で有界な解を持たない．つまり，Λ_k は有界でない半空間となる．したがって，すべての $\lambda \in \Lambda(x^0)$ に対して，$\gamma_k + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\, \delta_k{}^i \geqq 0$ であり，$\lambda \in \mathrm{Int}\,\Lambda_k$ では $\gamma_k + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\, \delta_k{}^i < 0$ となることから $\Lambda(x^0) \cap \mathrm{Int}\,\Lambda_k = \phi$，また，$\bar{\lambda} \in \Lambda_k$ であるから $\bar{\lambda} \in \Lambda(x^0) \cap \Lambda_k$ となる．つまり $\Lambda(x^0) \cap \Lambda_k \neq \phi$ となる． Q. E. D.

4. $\Lambda(x)$ とその隣接空間

$x^0 \in X$ が与えられれば $\Lambda(x^0)$ を生成できる．$\Lambda(x^0)$ についてはつぎのように定義する．

$$\Lambda(x_0) = \{\lambda | \lambda \in E^l,\ \gamma_j + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i\, \delta_j{}^i \geqq 0,\ j \in \bar{J}_0\} \tag{29}$$

$$\Lambda(x_0) = \{\lambda | \lambda \in E^l,\ \boldsymbol{Z}_j(\lambda) \geqq 0,\ j \in \bar{J}_0\} \tag{30}$$

単体法のくり返しにより x^0 より x^1 が求められるものとする．$p \in J_0$ を基底より出し，$k \in \bar{J}_0$ を基底に導入する列とすると， 新単体表における基底集合 J_1 と非基底集合 $\bar{J}_1$ とはつぎのように表わされる．

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= J_0 \cup \{k\} - \{p\} \\ \bar{J}_1 &= \bar{J}_0 \cup \{p\} - \{k\} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

また，J_1，$\bar{J}_1$ に対してつぎの関係が成立する．

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_p{}^1(\lambda) &= -\frac{1}{y_{pk}} \boldsymbol{Z}_k(\lambda),\quad p \in \bar{J}_1 \\ \boldsymbol{Z}_j{}^1(\lambda) &= \boldsymbol{Z}_j(\lambda) - \frac{y_{p6}}{y_{pk}} \boldsymbol{Z}_k(\lambda),\quad j \in \bar{J}_1 - \{p\} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

x^1 を基底集合 J_1 に対応しているものとすると，$\Lambda(x^1)$ は

$$\Lambda(x^1) = \{\lambda | \lambda \in E^l,\ \boldsymbol{Z}_j{}^1(x) \geqq 0,\ j \in \bar{J}_1\} \tag{33}$$

となる．$y_{pk} > 0$ であるから，(33)では

$$\boldsymbol{Z}_k(\lambda) \leqq 0,\quad j = p$$

$$\boldsymbol{Z}_i(\lambda) - \frac{y_{pi}}{y_{pk}} \boldsymbol{Z}_k(\lambda) \geqq 0,\quad j \in \bar{J}_1 - \{p\}$$

(注) $B[\Lambda(x^0)]$ は $\Lambda(x^0)$ の境界上の集合を示す．

となっているはずである．また，$k\in\bar{J}_0$ であるので，

$$H_k=\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_k(\lambda)=0\} \tag{35}$$

として表わされる H_k は

$$\Lambda(x^0)\subset\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_k(\lambda)\geqq 0\} \tag{36}$$

$$\Lambda(x^1)\subset\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_k(\lambda)\leqq 0\} \tag{37}$$

として表わされる $\Lambda(x^0)$ と $\Lambda(x^1)$ とを分離する分離超平面となっていることがわかる．したがって，

$$\mathrm{Int}\,\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)=\Lambda(x^0)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda(x^1)=\Phi$$

となる．また，$\lambda\in H_k$ であれば，$\boldsymbol{Z}_k(\lambda)=0$ である．

$$\bar{J}_1=\bar{J}_0\cup\{p\}-\{k\}$$

であるから，つぎの関係が満たされる．

$$\bar{J}_1-\{p\}=\bar{J}_0-\{p\}$$

したがって，H_k，$\Lambda(x^0)$，$\Lambda(x^1)$ に関し，

$$H_k\cap\Lambda(x^0)=\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_k(\lambda)=0,\ \boldsymbol{Z}_j(\lambda)\geqq 0,\ j\in\bar{J}_0-\{k\}\} \tag{38}$$

$$H_k\cap\Lambda(x^1)=\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_k(\lambda)=0,\ \boldsymbol{Z}_j(\lambda)\geqq 0,\ j\in\bar{J}_0-\{k\}\} \tag{39}$$

となる．(38)，(39)より明らにつぎのことが成立する．

$$H_k\cap\Lambda(x^0)=H_k\cap\Lambda(x^1)=H_k\cap\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)$$

このことから，

$$H_k\cap\Lambda(x^0)=H_k\cap\Lambda(x^1)\subset\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1) \tag{40}$$

となる．ところが，H_k は $\Lambda(x^0)$ と $\Lambda(x^1)$ との分離超平面であるから，つぎの関係が成立するはずである．

$$\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)\subset H_k\cap\Lambda(x^1)=H_k\cap\Lambda(x^0) \tag{41}$$

これらの(40)，(41)より，つぎの関係が導かれる．

$$H_k\cap\Lambda(x^0)=H_k\cap\Lambda(x^1)=\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)$$

以上のことから，つぎの定理をうる．

定理 5　x^0 を基底解とし，$\Lambda(x^0)=\{\lambda\mid,\ \boldsymbol{Z}_j(\lambda)\geqq 0,\ j\in\bar{J}_0\}$ とする．$\lambda^*\in B[\Lambda(x^0)]$ に対し $\boldsymbol{Z}_k(\lambda^*)=0$ となる $k\in\bar{J}_0$ が少くとも 1 個は存在する． $H_k=\{\lambda\mid\boldsymbol{Z}_k(\lambda)=0\}$ とすると k 列を基底に入るときつぎの関係が成立する．

(1)　すべての r で $y_{rk}\leqq 0$ とすると

$$\Lambda(x^0)\cap\Lambda_k=H_k\cap\Lambda(x^0)$$

(2)　$y_{pk}>0$ を軸とすると，$J_1=J_0\cup\{k\}-\{p\}$ となり

(i)　$\Lambda(x^0)\subset\{\lambda\mid\boldsymbol{Z}_k(\lambda)\geqq 0\}$，$\Lambda(x^1)\subset\{\lambda\mid\boldsymbol{Z}_k(\lambda)\leqq 0\}$ となる $\Lambda(x^0)$ と $\Lambda(x^1)$ とを H_k は分離する．

(ii)　$\Lambda(x^0)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda(x^1)=\mathrm{Int}\,\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)=\Phi$

(iii)　$H_k\cap\Lambda(x^0)=H_k\cap\Lambda(x^1)=\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)$

（証明） (1)について，定理 4 より $\Lambda(x^0)\cap \mathrm{Int}\,\Lambda_k=\Phi$

$$\Lambda(x^0)\cap \Lambda_k = \Lambda(x^0)\cap [\mathrm{Int}\,\Lambda_k \cup H_k]$$
$$= [\Lambda(x^0)\cap \mathrm{Int}\,\Lambda_k]\cup[\Lambda(x^0)\cap H_k]=\Lambda(x^0)\cap H_k$$

(2)については省略 Q. E. D.

定理 6 $\mathrm{Int}\,\Lambda=\{\lambda\mid\lambda\in E^l,\ \lambda_i>0,\ \sum^{l}\lambda_i\leqq 1\}$ とする．

$H_k\cap\Lambda(x^0)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda\neq\phi$ ならば，k 列の導入による解 x^1 は有効解である．

（証明） $x^0\in N$ と仮定する．$\gamma_k+\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\delta_k{}^i\geqq 0$，$\lambda\in\Lambda(x^0)$ ところが，$H_k\cap\Lambda(x^0)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda\neq\phi$ で $x^0\in N$．定理 5 より $H_k\cap\Lambda(x^1)=H_k\cap\Lambda(x^0)$．ゆえに $x^1\in N$ Q. E. D.

定理 7 有効端点の集合は連結集合である．

（証明） x_1，$x_2\in N_{px}$（注） とする． $\Lambda(x_1)$ と $\Lambda(x_2)$ は Λ に対し少くとも 1 個の共通点を持つ．$\lambda_1\in\Lambda(x_1)\cap\Lambda$，$\lambda_2\in\Lambda(x_2)\cap\Lambda$ とする．Λ は凸であるから $[\lambda_1,\ \lambda_2]\in\Lambda$ しかも Λ は有限被覆であるから $\{\Lambda(x_1),\ \Lambda(x_{12})\cdots,\ \Lambda_{1h}\}$ となる系列を持つ． また $\Lambda(x_{1h})=\Lambda(x_2)$ となるような個々の多面体を選ぶことができる． Q. E. D.

5. 単体法と有効解

$\lambda\in\Lambda$ が与えられれば線形多目的計画問題は線形計画法を用いて有効解を求めうる．その求解の過程で単体表をかなり利用する．それならば単体法における軸操作により得られる特性情報を利用できないだろうか．

$$C^ix=C_1{}^ix_1+C_2{}^ix_2+\cdots\cdots+C_n{}^ix_n,\ i=1,\ \cdots\cdots,\ l$$

を l 個の目的関数とし

$$X=\{x\mid x\in E^n,\ \sum_{j=1}^{l}C_{rj}x_j=b_r,\ r=1,\ \cdots,\ m,\ x\geqq 0\}$$

を実行可能領としての最大化問題とする．この問題を単体表で示すとき，

$$\boldsymbol{Z}_j{}^{(i)}=0,\ j\in J$$
$$\boldsymbol{Z}_j{}^{(i)}=\sum_{r=1}^{m}C_r{}^i\,y_{rj}-C_j{}^i,\ j\in\bar{J}$$
$$\boldsymbol{Z}_0{}^i\ =\sum_{r=1}^{m}C_r{}^i\,y_r{}^0,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ l$$

となっている．いま $\boldsymbol{Z}_j\equiv(\boldsymbol{Z}_j{}^{(1)},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{Z}_j{}^{(l)})^T$，$Z_0\equiv(Z_0{}^1,\ \cdots\cdots,\ Z_0{}^l)^T$ としよう．

単体法で基底導入基準としてはつぎの θ_j を求める．

$$\theta_j=\min_r\left\{\frac{y_r{}^0}{y_{rj}};\ y_{rj}>0\right\} \tag{42}$$

このとき，j 列を基底に導入する．基底導入による新基底での新目的関数ベクトル Z_0 は

$$Z_0=Z_0-\theta_j\boldsymbol{Z}_j$$

として与えられる．

（注） N_{ex} は N の端点集合とする．

定理 8　基底解 x^0 が与えられ，$\theta_j>0$，$j\in\bar{J}$ とすると，

（i）　$\boldsymbol{Z}_j\leq 0$ ならば $x^0\notin N$

（ii）　$\boldsymbol{Z}_j\geq 0$ ならば j 列の導入による基底は有効解ではなくなる．

（証明）　(i)　j 列の導入により新しい隣接端点 x^1 を作りうる．しかも，

$Z_0\geq Z_0$ $(\because -\theta_j\boldsymbol{Z}_j\geqq 0)$

(ii)　(i) と同様な理由で $Z_0\leqq Z_0$　　Q. E. D.

定理 9　基底解 x^0 が与えられたとき，

$$\theta_j\boldsymbol{Z}_j\leq\theta_k\boldsymbol{Z}_k,\ j\neq k,\ j,\ k\in\bar{J}$$

となるような k，j 列が存在するならば，k 列は j 列の導入より望ましくない．

（証明）　k 列導入により $\hat{Z}_0$，j 列導入により $\hat{\hat{Z}}_0$ となるものとする．

$$\hat{Z}_0=Z_0-\theta_k\boldsymbol{Z}_k$$

$$\hat{\hat{Z}}_0=Z_0-\theta_j\boldsymbol{Z}_j$$

これより，　$\hat{Z}_0-\hat{\hat{Z}}_0=\theta_j\boldsymbol{Z}_j-\theta_k\boldsymbol{Z}_k\leq 0$　　Q. E. D.

単体法でのくり返しにおいて，$\boldsymbol{Z}_j{}^{(i)}\geq 0$，$j\in\bar{J}$であれば最適解となっており，$\boldsymbol{Z}_k{}^{(i)}=0$，$k\in J$ となるような列が存在しない場合は有効解となる．

いま基底解 $\bar{x}$ に対し $\boldsymbol{Z}_j\leq 0$ となる列が存在しないと仮定してみる．すなわち，非基底列では $\boldsymbol{Z}_j\geq 0$ となっており，$\theta_k\boldsymbol{Z}_k\geq\theta_j\boldsymbol{Z}_j$，$j\neq k$ となる $k\in\bar{J}$ は基底に導入出来ない．また，$\boldsymbol{Z}_j{}^{(i)}\geqq 0$，$j\in\bar{J}$ となる行も存在しないものと仮定してみる．そうすると，導入しうる列としては 0 ベクトルで与えられ列のみとなる．これらの列については $\theta_k\boldsymbol{Z}_k$ と $\theta_j\boldsymbol{Z}_j$ とを比較できない．このような場合の対策として X にある条件を付加することが考えられる．$\bar{x}\in X$ であるから $C^ix\geqq C^i\bar{x}$ という条件式を付加する．等式条件で考えるとつぎのとおり．

$$C^ix-\varepsilon_i+y_i=C^i\bar{x},\ i=1,\ \cdots,\ l \tag{43}$$

ここでつぎの線形計画問題を考える．

$$\left.\begin{aligned}&\max\ v=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i\\&\text{s. t}\ Ax=b\\&\qquad C^ix-\varepsilon_i+y_i=C^i\bar{x},\ i=1,\ \cdots,\ l\\&\qquad \varepsilon_i\geqq 0,\ x\geqq 0\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

この問題では初期解を $\bar{x}\in X$，$\varepsilon_i=0$，$y_i=0$ として解く．いま，$\max v>0$ と仮定しよう．すると少くとも 1 つの $\varepsilon_i>0$ が存在する．$C^ix=C^i\bar{x}+\varepsilon_i$ であるから，少くとも 1 つの i に対しては $C^ix>C^i\bar{x}$ となる．したがって，$\bar{x}\in X-N$ となる．もし $\bar{x}$ が(44)の最大解であるとすると $\max v=0$，$\varepsilon_i=0$ となって，$Cx\geq C\bar{x}$ となる $x\in X$ は存在しないので $\bar{x}\in N$ となる．以上のことからつぎの定理をうる．

定理10　つぎに与える線形計画問題において

$$\max v=\sum_{i=1}^{l}\varepsilon_i$$

$$\text{s.t.}\quad Ax=b,\ \varepsilon\geqq 0,\ Cx-\varepsilon\geqq C\bar{x},\ x\geqq 0$$

$\bar{x}\in X-N$ となるための必要十分条件は $\max v>0$ であり，$\bar{x}\in N$ となるための必要十分条件は $\max v=0$ である．

6. 解法アルゴリズムのまとめ

線形多目的計画問題の解法においては，有効解を求めると同時にその求解に用いたパラメータ空間の概要を明確にすることが要求される場合が多い．そのため，Λ 空間の分割による解法をまとめるとつぎのとおり，

ステップ 1　$\lambda^i\in\Lambda$ を固定し，$\max\{P_{\lambda}{}^i|x\in X\}$ を，LP 問題として解く．

ステップ 2　x^i を求め，$\Lambda(x^i)$ を作成する．

ステップ 3　$\Lambda(x^i)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda=\Phi$ かどうか調べる．

　$\Lambda(x^i)\cap\mathrm{Int}\fallingdotseq\Phi$ ならば，$x^i\in N$ としてステップ 5 へ．

　$\Lambda(x^i)\cap\mathrm{Int}=\Phi$ ならば，ステップ 4 へ．

ステップ 4　隣接基底解 x^{i+1} を生成してステップ 1 へ．

ステップ 5　$\cup[\Lambda(x^i)\cap\Lambda]=\Lambda$ ならば終了，そうでない場合，ステップ 4 へ．

ステップ 1 では $\lambda^i=0$ として始める．すると $\lambda^{i+1}=1$ となり，$\max\{C^{i+1}x|x\in X\}$ を解くことになる．もし解が唯一個であれば，$\Lambda(x^i)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda\fallingdotseq\Phi$ ので $x^i\in N$ となる．したがってステップ 3 のところに行く．

ステップ 2 では $\Lambda(x^i)$ は定理 3 が成立するようにする．

ステップ 3 では，$\Lambda(x^1)\cap\Lambda=\Phi$ であれば明らかに，$x^1\notin N$ となる．$\Lambda(x^1)\cap\Lambda\fallingdotseq\Phi$ であって $\Lambda(x^1)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda=\Phi$ であれば x^1 の他に別の解 x^0 が生成されるような $\bar{\lambda}\in B[\Lambda]$ が存在する．この場合，

$$\bar{\lambda}\in\Lambda(x^0),\quad \Lambda(x^0)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda\fallingdotseq\Phi$$

となっている．すなわち，$x^0\in N$ である．したがって，すべての $\lambda\in\Lambda(x^0)$ に対して $\bar{\lambda}Cx^0\geqq\lambda Cx^1$ であり

$$\bar{\lambda}Cx^0=\lambda Cx^1,\quad \bar{\lambda}\in\Lambda(x^0)\cap\Lambda(x^1)$$

となっている．$\Lambda(x^1)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda=\phi$ であるから $\lambda Cx^1>\lambda Cx^0$ となる $\lambda\in\Lambda$ は存在しない．また，$\Lambda(x^1)\cap\mathrm{Int}\,\Lambda=\phi$ であれば，$\mathrm{Int}\,\Lambda(x^1)\cap\Lambda=\phi$ となる．したがって，すべての $\lambda\in\Lambda$ に対し $\lambda Cx^1\geqq\lambda Cx^0$ となって $x^i\notin N$ といえる．

ステップ 4 では x^i に対する隣接基底解 x^{i+1} を生成する．この場合，これまで調べてない新しい基底を探さなければならない．

ステップ 5 では Λ 空間がその部分空間 $\Lambda(x^i)$ により完全に覆われるようになったかどうかを調べるものである．すなわち，Λ が完全に $\Lambda(x^i)$ により分割されたかどうかをチェックするものである．

7. 線形多目的関数における感度分析

$\lambda \in \Lambda$ が与えられたとき，(3)の問題は

$$\max\{\lambda Cx \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$$

として与えられる．この問題に対する双対問題は

$$\min\{\pi b \mid \pi A \geqq \lambda C,\ \pi \geqq 0\}$$

となる．したがって，ある $\lambda^* \in \Lambda$ が与えられた場合に，x^* が有効解であるための必要十分条件はつぎのとおり．

$$\left.\begin{array}{l} \pi^* A - \lambda^* C \geqq 0 \\ x^*(\pi A - \lambda^* C) = 0 \\ \quad Ax^* \leqq b \\ \pi^*(Ax^* - b) = 0 \\ \quad x^*,\ \pi^* \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{45}$$

本来，多目的計画では意思決定者の最終決定に寄与するような分析でなければならない．そのためには有効解と Λ 空間との関連性，と同時に有効解の近傍の変動に対する影響度を検討することは極めて重要である．

Fravell によると，ベクトルパラメータ α_0 に対し，$\triangle_\alpha$ の変動をさせたとき，x^* が基底有効解となる条件はつぎのとおり．

$$\left.\begin{array}{l} \triangle_\alpha(\nabla x^*)_{\alpha=\alpha_0} \geqq -x^* \\ \triangle_\alpha(\nabla \pi^*)_{\alpha=\alpha_0} \geqq -\pi^* \\ \triangle_\alpha(\nabla[\pi^* A^0 - \lambda^* C^0])_{\alpha=\alpha_0} \geqq -(\pi^* A^0 - \lambda^* C^0) \\ \quad \pi^*,\ \lambda^* \geqq 0 \end{array}\right\} \tag{46}$$

ただし，∇ は微分演算子であり，A^0 は A の非基底対応行列，C^0 は C の非基底対応行列，C^* は C の基底対応行列とする．(45)条件では，

$$x^* = B^{-1}b,\quad \pi^* = \lambda^* C^* B^{-1} \tag{47}$$

となっている．(45)に(46)を代入し，∇_k は α の k 番目の要素とするとつぎのように展開される．

$$\begin{aligned} \nabla_k x^* &= \nabla_k(B^{-1}b) = -B^{-1}(\nabla_k B)B^{-1}b + B^{-1}(\nabla_k b) \\ &= -B^{-1}(\nabla_k B)x^* + B^{-1}(\nabla_k b) \end{aligned}$$

$$\nabla_k \pi^* = \lambda^*(\nabla_k C^*)B^{-1} - \pi^*(\nabla_k B)B^{-1}$$

$$\begin{aligned} \nabla_k\{\pi^* A^0 - \lambda^* C^0\} &= \nabla_k\{\lambda^* C^* B^{-1} A^0 - \lambda^* C^0\} \\ &= \lambda^*\{(\nabla_k C^*)B^{-1}A^0 + C^*(\nabla_k B^{-1})A^0 + C^* B^{-1}(\nabla_k A^0) - \nabla_k C^0\} \end{aligned}$$

となることから(46)よりつぎのようになる．

$$\sum_k \triangle_{\alpha_k}\{-B^{-1}(\nabla_k B)x^* + B^{-1}(\nabla_k b)\} \geqq -x^* \tag{48}$$

$$\sum_k \triangle_{\alpha_k}\{\lambda^*(\nabla_k C^*)B^{-1} - \pi^*(\nabla_k B)B^{-1}\} \geqq -\pi^* \tag{49}$$

$$\sum_k \triangle_{\alpha_k} \{\lambda^*[(\nabla_k C^*)B^{-1}A^0 + C^*(\nabla_k B^{-1})A^0 + C^*B^{-1}(\nabla_k A^0) - \nabla_k C^0]\}$$
$$\geqq -\{\pi^* A^0 - \lambda^* C^0\} \qquad (50)$$

つまり，A，C，b が変動したときに，x^* が有効解であるための条件が(48)〜(50)に導かれたわけである．決定者の有効解選択の範囲を限定するためには決定者の好みや優先度を考慮して $\bar{\lambda} \in \Lambda$ を決定し，その対応 $\bar{x}$ を最終的に定めなければならない．

8．おわりに

多目的計画問題の数学的構造を分析しその解法理論について記述したが，評価尺度が単一目的の場合のようにスカラーでなくベクトルで与えられることによる困難さを示している．ベクトル値の判断には半順序集合での価値判断しかなく，スカラー値のような全順序集合での取扱いができない．この意味で有効解を求める計画問題として処理しなければならない．有効解となると唯一個の最適解の場合と異なり一般に複数個存在することになる．

線形多目的計画問題において，l 個の目的関数が与えられ，それぞれの目的関数についてその値を最大にしたい計画問題としよう．すなわち

$$\begin{cases} \max\ f_i(x) = C^i x \\ \text{s.t.}\ Ax \leqq b,\quad x \geqq 0 \end{cases} \qquad (51)$$

として与えられる LP 問題を考えよう．

これを P^i とするとし，この最適解を $\bar{x}^i$ とする．

全体の問題 P は個々の P^i との関連性を如何に考えるべきであろうか．いまある $\lambda_i \geqq 0$，$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1$ が与えられたして，全体問題 P に対応するスカラー値

$$\lambda_1 f_1(\bar{x}_1) + \lambda_2 f_2(\bar{x}^2) + \cdots\cdots + \lambda_l f_l(\bar{x}^1) \qquad (52)$$

を考えると，これはつぎの LP 問題の最適値ではない．

$$\begin{cases} \max\ \lambda C x \\ \text{s.t.}\ Ax \leqq b,\ x \geqq 0 \\ \qquad \lambda \geqq 0,\quad \lambda = (\lambda_i),\quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1 \end{cases} \qquad (53)$$

しかしながら，直感的に考えると(52)で表わされる値が何か共通の尺度で測れるものであれば λ_i そのものも簡単に規定できるが，共通の尺度でない場合，(52)は何を意味するであろうか．決定考が各 f_i，$i=1$，……，l に対し如何なる優先順位を考えるかあるいは如何なる重点度をおくものであるかによって決定されるべきであろう．(53)に対する最適解を x^*，その双対最適解を π^* とすると(47)より $x^* = B^{-1}b$，$\pi^* = \lambda^* C^* B^{-1}$ となる．したがって，$\pi^* B = \lambda^* C^*$ という関係が成立する．この π^* は条件式における右辺の資源価格に相当するものである．すなわち，目的関数の係数行列と資源価格との関連で重み λ^* が定まることを示している．つまり π か λ かのいずれかに，決定者の意向が反映されて有効解が決定されるべきものである．これがその，Λ 空間の分割により $\Lambda(x)$ と N との関係が明らかになれば，

$$\Lambda(x)=\{\lambda\{\lambda\in E^l,\ \boldsymbol{Z}_j(\lambda)\geqq 0\}$$

となる Λ の部分集合も決定でき，決定者の望ましい $\tilde{\Lambda}\subseteq\Lambda$ に含まれる有効解も決定できよう．

多目的計画問題で，その有効解を求めようとするとき決定者との情報交換により，この $\tilde{\Lambda}\subseteq\Lambda$ を限定しなければならない．しかしながら，現実にはこの種の multicriterion programming の定式化は極めて難しい．決定者との interaction により，可能な限り $\tilde{\Lambda}\subseteq\Lambda$ を限定するにしても最終的には各種 $f_i(x)$ 間のトレード・オフが十分に出来ない場合が多い．本論文では，Λ 空間の分割と有効解との関連につきのべ，有効解での感度分析についてもふれたが，効率的計算機アルゴリズム作成はできなかった．しかし，少くとも有効解を求める解法手順だけは示した．具体的な計算例などの検討についてはいずれ又報告したい．

文献

〔1〕 Roy B. "Problems and Methods with multiple objective functions" Mathematical Programming, **1** No. 2, 1971

〔2〕 Gal T. and Nedoma J. "Multiparametric Linear Programming," Management Science, **18**, No. 7, 1972

〔3〕 Evans J. P. and R.E. Steuer "A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programs", Mathematical Programming, **5**, No. 3, 1973

Some Comments for Multicriteria Linear Programming

Hiroyuki NARIHISA

Department of General Education,
Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 25, 1981)

Multicriteria programming problems treat the optimization which have multiple objectives within the programs. In realistic point of view, these kinds of multiple-criteria programming may be natural formulation of human decision-making processes for actual social and economical phenomena. However, the theory of these multiple-criteria decision-making is more difficult comparing with the single objective optimization.

The multicriteria programming problems may be formulated as the vector optimization problems. Therefore, if any weights among these objectives are given, we can treat it as the single objective linear programs. Of course, these weights can not be given apriori. Because, we can not perform the exact trade-off between the given objectives. Consequently, it is very important to analyse the relation between the set of weights for the given objectives and the efficient solutions for the given optimization problems.

In this paper, we present the solving procedure for multiple objective linear programming problems by applying the simplex method using the decomposition of a parametric space.