

氏名・(本籍)	シマル ナト 四丸 直人 (熊本県)
学 位 の 種 類	博士 (理学)
学 位 記 番 号	甲第理 1 1 3 号
学位授与の日付	平成 3 1 年 3 月 2 0 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当(課程博士)
学位論文題目	On some behaviors of irrational rotations
論文審査委員	主査 教授 高嶋 恵三 副査 教授 大江 貴司 准教授 森 義之 教授 山崎 正之 名誉教授 釜江 哲朗 (大阪市立大学)

# 論文内容の要旨

申請者氏名 四丸 直人

論文題目

On some behaviors of irrational rotations

本論文では、無理数の連分数展開に関する理論、特に近似分数に関する理論や Ostrowski 展開などを応用することにより無理数回転の動きに関する exact な公式、無理数回転の平均や分散からの fluctuation や無理数回転の一様分布への収束を測る discrepancy の挙動の研究をし、rational rotation approximation の手法を応用することにより、詳細な結果を得ることを目的とした。

1916 年に H. Weyl はフーリエ解析の手法を用いることによって無理数回転は漸近的に  $[0, 1)$  上に一様分布するという有名な結果を発表した。それ以降、一様分布数列、特に無理数回転に関する研究は整数論や確率論などの多くの分野において様々な形で発展してきた。例えば 1920 年代、Hardy–Littlewood、Ostrowski、Hecke や Behnke など多くの研究者が Lattice point problem や Diophantine approximation などの問題に関連して無理数回転に対する多くの研究結果を発表している。特に、Ostrowski は Ostrowski 展開と呼ばれる無理数  $\alpha$  の連分数展開に基づく自然数の展開を導入した。また、Mori–Takashima はべき乗の先頭桁の問題に対して、無理数の連分数展開を応用することで興味深い研究結果を与えている。

本論文では、Mori–Takashima のアイデアを発展させ、その改良 (rational rotation approximation) を導入し諸問題に対して応用した。また、rational rotation approximation だけでなく Ostrowski 展開を効果的に活用することで重要な無理数回転の挙動 (無理数回転の各点の位置、無理数回転の部分和の挙動、無理数回転の discrepancy の挙動) を研究した。特に、無理数  $\alpha$  がその連分数展開において large partial quotients を持つ場合、本研究の手法は非常に有効であり、上記の問題に対してより詳細な公式や評価式を与えた。それらを利用することにより、large partial quotients を持つ  $\alpha$  に基づく無理数回転の種々の異常な挙動に対して数学的な説明を与えた。

無理数回転の研究は 100 年以上の歴史があるが、無理数の  $n$  次近似分数を  $\frac{p_n}{q_n}$  とするとき、有理数回転の点  $\left\{i \frac{p_n}{q_n}\right\}$ ,  $(i = 1, 2, 3, \dots)$  は有限個の点  $\frac{k}{q_n}$ ,  $(k = 0, 1, \dots, q_n - 1)$  を周期的に取ることから、有理数回転を利用した研究はほとんどなかったように思われる。ただし、 $\{x\}$  を実数  $x$  の小数部分とする。Section 3 では、無理数はその連分数展開における近似分数によって非常によく近似されるという性質と自然数  $N$  に対する Ostrowski 展開を応用することにより無理数回転を有理数を用いて表記できる exact な公式を導いた。

また、 $[0, 1)$  上の一様分布の平均は  $\frac{1}{2}$ 、分散は  $\frac{1}{12}$  である。Section 4 では、平均  $\frac{1}{2}$ 、分散  $\frac{1}{12}$  からの無理数回転の fluctuation について議論した。mean からの fluctuation つまり部分和  $\sum_{i=1}^N (\{i\alpha\} - \frac{1}{2})$  の挙動に対しては、部分区間  $[\frac{k}{q_n}, \frac{k+1}{q_n})$  での  $\{i\alpha\}$  の線形性を用いて cancellation の手法を有効に利用することにより exact な公式を与えた。次に、variance からの fluctuation つまり部分和  $\sum_{i=1}^N \left\{ (\{i\alpha\} - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right\}$  の挙動については直接計算により exact な公式を与えた。これらの公式を応用することにより、 $\alpha$  が large partial quotient を持つ場合、mean からの fluctuation は二次関数的な挙動を繰り返し、一方 variance からの fluctuation は三次関数的な挙動を繰り返すことについての説明を与えた。

Section 5 では、一様分布への収束の速さの評価関数である、無理数回転に対する discrepancy の挙動に対して考察した。Setokuchi-Takashima や Setokuchi の論文では Schoissengeier の公式を応用し large partial quotient によって引き起こされる “hills” の出現や “hill” と “hill” の間の “valley” について議論している。これに対して、本論文では Schoissengeier の結果や手法を利用せずに rational rotation approximation や Ostrowski 展開などを用いることにより discrepancy に対する評価を与えた。それらの結果を用いて、 $\alpha$  が large partial quotients を持つ場合 discrepancy が示す異常な挙動に数学的な説明を与えた。

まず初めに、rational rotation approximation をより精密化し、Ostrowski 展開を応用することにより、一般の無理数回転に対して discrepancy の評価を与えた。さらに、この評価を応用することで Weyl の補題に対する簡単な別証明を与えた。

次に、 $\alpha$  が single isolated large partial quotient を持つ場合、無理数回転の discrepancy のグラフにおいて、第一周期は直線的に減少し、第二周期以降は hills が周期的に繰り返し現れるという現象に対して数学的な説明を与えた。

最後に、 $\alpha$  が single large partial quotient を持つ場合だけでなく、一般の無理数回転の discrepancy に対する評価を導いた。その評価を応用することにより、discrepancy グラフの様相について説明や評価を与えた。まず初めに  $\alpha$  が double large partial quotients を持つ場合、large partial quotients の order が偶数次同士（または奇数次同士）のときの discrepancy のグラフは large partial quotients によって引き起こされる hills が重なり合うことを示した。一方、large partial quotients の order が偶数次と奇数次のように異なる場合はそれぞれに起因する hills が打ち消し合うことを示し、グラフの形がアーチ状になることを説明した。さらに、3 つ以上の large partial quotients を持つ場合のグラフは各々 hills の重なり合いと打ち消し合いが組み合わさった様相となることについて数学的な説明を与えた。

## 学術論文（査読有）

- [1] Doi, K. , Shimaru, N. and Takashima, K.: An upper estimate for the discrepancy of irrational rotations, *Acta Math. Hungr.*, **152** (1), (2017), 109-113.
- [2] Shimaru, N. and Takashima, K.: On discrepancies of irrational rotations: An approach via rational rotations, *Periodica Math. Hungr.*, **75** (1), (2017), 29-35.
- [3] Shimaru, N. and Takashima, K.: Continued fractions and irrational rotations, *Periodica Math. Hungr.*, **75** (2), (2017), 155-158.
- [4] Shimaru, N. and Takashima, K.: On discrepancies of irrational rotations with several large partial quotients, *Acta Math. Hungr.*, **156** (2), (2018), 449 – 458.
- [5] Mori, Y. , Shimaru, N. and Takashima, K.: On the distribution of partial sums of irrational rotations, *Periodica Math. Hungr.*, **in print**.

## 学術論文（査読無）

- [1] 高嶋 恵三、筏津 俊治、四丸 直人: 先頭桁の分布の問題に対するカイ 2 乗検定の応用, 日本計算機統計学会, 第 28 回シンポジウム講演論文集, 249-252
- [2] 高嶋 恵三、四丸 直人:  $a^n$  の先頭桁の問題に対する  $\chi^2$  検定の応用, 岡山理科大学紀要, 第 50 号, 2014 A, 1-8.
- [3] 高嶋 恵三、四丸 直人: 円周率に基づく無理数回転について, 岡山理科大学紀要, 第 51 号, 2015 A, 7-14.
- [4] 高嶋 恵三、四丸 直人、土井 花菜: 無理数回転の部分和の挙動について, 岡山理科大学紀要, 第 52 号, 2016 A, 1-6.

## 口頭発表

- [1] 高嶋 恵三、筏津 俊治、四丸 直人: 先頭桁の分布の問題に対するカイ 2 乗検定の応用, 日本計算機統計学会 第 28 回シンポジウム, 沖縄科学技術大学院大学 (OIST), 2014.11.15.
- [2] 高嶋 恵三、四丸 直人: ベキ乗の先頭桁の問題と discrepancy, 平成 26 年度日本数学会 中国・四国支部例会, 徳島大学, 2015.1.29.
- [3] Shimaru, N. and Takashima, K.: Outlines of the behavior of discrepancies of irrational rotations with single isolated large partial quotients, Probability Seminar, Technische Universität Graz, 2015.3.10
- [4] Shimaru, N. and Takashima, K.: On irrational rotation with single isolated large partial quotient: studies via discrepancy and leading digit, Colloquium talk, Université de Rouen, 2015.10.1.
- [5] Shimaru, N. and Takashima, K.: On early behavior of rational rotations, Colloquium talk, 岡

山理科大学, 2015.11.26.

- [6] Shimaru, N. and Takashima, K.: On early behavior rational rotations, Ergodic theory and Related fields, 慶応大学, 2015.11.27.
- [7] 高嶋 恵三、四丸 直人: On The Behavior of Rational and Irrational Rotation, 平成 27 年度 日本数学会中国・四国支部例会, 広島大学, 2016.1.24
- [8] 高嶋 恵三、四丸 直人: 先頭桁の問題について, 2016 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 関西大学, 2016.9.16.
- [9] 高嶋 恵三、四丸 直人: 無理数回転の挙動について, 2016 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 関西大学, 2016.9.16.
- [10] 高嶋 恵三、四丸 直人: 無理数の discrepancy について, 2016 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 関西大学, 2016.9.16.
- [11] Shimaru, N. and Takashima, K.: On the behavior of Rational Rotations and Irrational Rotations, Colloquium talk, Université de Rouen, 2016.11.10.
- [12] Shimaru, N. and Takashima, K.: Irrational rotations and rational rotation approximations, Colloquium talk, Universität Mannheim, 2016.11.17.
- [13] 高嶋 恵三、四丸 直人: 無理数回転の部分和の分布について, 平成 28 年度 日本数学会中国・四国支部例会, 愛媛大学, 2017.1.22.
- [14] 四丸 直人: 無理数回転の諸問題について, 確率論ヤングサマーセミナー, 国民宿舎 良寛荘, 2017.8.8.
- [15] 高嶋 恵三、四丸 直人: Another proof of Weyl's lemma, 2017 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 山形大学, 2017.9.11.
- [16] Shimaru, N.: Partial Sum of Irrational Rotations : Variance, Colloquium talk, Université de Rouen, 2017.11.16.
- [17] 高嶋 恵三、四丸 直人: On the behavior of discrepancy of irrational rotation with single isolated large partial quotient, 平成 29 年度 日本数学会中国・四国支部例会, 山口大学, 2018.1.21.
- [18] Shimaru, N. and Takashima, K.: On discrepancies of irrational rotations with several large partial quotients, Colloquium talk, Rényi Institute, 2018.6.12.
- [19] 高嶋 恵三、四丸 直人: Partial sum of irrational rotations: mean, 2018 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 岡山大学, 2018.9.24.
- [20] 高嶋 恵三、四丸 直人: Partial sum of irrational rotations: variance, 2018 年度 日本数学会 秋季総合分科会, 岡山大学, 2018.9.24.

## 審査結果の要旨

本論文では、一様分布数列の重要な研究対象である、無理数回転について研究している。一様分布数列、特に無理数回転は確率論（中でもエルゴード理論）、解析的整数論だけでなく Monte-Carlo 法などの応用数学の分野でも重要な対象である。20世紀初頭からの100年以上の歴史のあるこの分野では H. Weyl による先駆的な研究以来 Fourier 解析を利用した著名な研究結果が多数発表されている。それらの多くは計算内容が煩雑なものが多いだけでなく、具体的な無理数回転に応用する場合多くの困難が生じることが多々あった。特に無理数  $\alpha$  の連分数展開において、非常に大きな部分分母が出現する場合、 $\alpha$  により引き起こされる無理数回転の挙動について具体的な知見を得るには大変な困難が必要とされる。

それに対し、本論文では、Mori-Takashima により導入された「有理数回転」の手法をより精密化し、上記のような  $\alpha$  に基づく無理数回転に関して新規の研究成果を多々得ている。

本論文の研究対象は大きく分けて、次の3点である：1. 無理数回転の有理数による表示。2. 格子点問題に関係する無理数回転の部分和（平均からの変動、分散からの変動）。3. discrepancy に対する精密な評価(single large partial quotient, multiple large partial quotients)。

本論文の研究は単に理論的に深く研究を進め、従来予見されていない理論的な結果を多く導いている。それだけでなく、コンピューターによる数値計算を応用し、理論的に未知の現象を探り当て、数学的にそれらを議論し、理論的に解析している点は海外、特にヨーロッパなどのエルゴード理論や解析的数論の研究者達から高く評価されるものである。中でも、一様分布の分散からの fluctuation の挙動の研究は、従来の理論結果から推測できない現象をも議論している。さらに、 $\alpha$  が複数の大きな部分分母を持つ場合の無理数回転に対する discrepancy の挙動についての詳細な理論結果と数値計算による具体的な結果も海外の研究者達から高く評価されている。

これらの観点から、本論文は学位授与の方針にも十分合致し、また新規性、独自性にも富んだものであり、博士号の学位論文としてふさわしいものと評価される。