

# ウェーブレット変換に及ぼす マザーウェーブレット関数の特徴

高山 和敏・東 恒人\*・中川紀美雄\*\*

岡山理科大学大学院工学研究科修士課程電子工学専攻

\*岡山理科大学工学部情報工学科

\*\*岡山理科大学工学部電子工学科

(1996年10月7日 受理)

## 1. はじめに

信号処理の分析法として、高速フーリエ変換、ウィグナー・ビル分布などが知られている。近年、これらと異なる新しい手法として「ウェーブレット変換」が注目されている。すでに、具体的な応用例として、画像圧縮、マルチメディア、音楽、音響信号処理、計測等々の分野での活用を目指した取り組みも活発化している。<sup>1)</sup>本論文では、まず、ウェーブレット変換に及ぼすマザーウェーブレット関数の影響を調べ、次に、音声分析へのウェーブレット変換の適用法について述べる。

## 2. ウェーブレット変換の定義

ウェーブレット変換は、基底関数（この関数は時間的に有限の広がりを持ち、マザーウェーブレット関数と呼ばれている。以下マザー関数と略す。）と分析しようとする信号との畳み込み積分で表すことができ、この変換を実行することにより、信号を構成する周波数成分の時間的変動の様子を抽出することができる。すなわち、上記のマザー関数を広げたり、縮めたりすることにより、それぞれ低周波成分、高周波成分を抽出することができる。ただし、低周波では、周波数分解能が高くなり、高周波では時間分解能が高くなる。

マザー関数を $\psi(t)$ とすると、基底関数は次式で定義される。<sup>1)</sup>

$$\psi(t)_{(a,b)} = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left[\frac{t-b}{a}\right] \quad (1)$$

なお、 $a$ はスケール変換(基底関数を広げたり、縮めたりするパラメータ)、 $b$ はシフト変換(時間軸上において、基底関数を移動させるためのパラメータ)である。<sup>1)</sup>

信号 $s(t)$ のウェーブレット変換 $S_{(a,b)}$ は、マザー関数 $\psi(t)_{(a,b)}$ と信号 $s(t)$ との内積として表され、次式で定義される。<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}
 S_{(a,b)} &= \langle \psi(t)_{(a,b)} | s(t) \rangle \\
 &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left[ \frac{t-b}{a} \right] s(t) dt
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで、 $\psi^*$ は、 $\psi$ の複素共役である。<sup>1)</sup>

### 3. マザーウェーブレット関数

マザー関数の種類によって、ウェーブレット変換量がどのような影響を受けるのか、四種類の有名なマザー関数を用いて調べる。

#### 3.1 Haar 関数

Haar関数は、Haar によって1909年頃作られた関数であり、次式で表される。<sup>(1)</sup>

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 0.5) \\ -1 & (0.5 \leq t \leq 1) \\ 0 & \text{otherwhere} \end{cases} \tag{3}$$

図1にその波形を示す。

#### 3.2 Meyer 関数

Meyer 関数は、周波数領域では、コンパクトサポートであり、かつ時間領域では、急激に減少する関数であり、次式で表される。<sup>1)</sup>

$$\psi(t) = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \psi^*(\omega) d\omega \tag{4}$$

ここで、 $\omega$  は角周波数であり、 $i = \sqrt{-1}$  である。図2にその波形を示す。

#### 3.3 Mexican 関数

Mexican 関数は、ガウス関数の2階導関数を用いて作られた関数であり、次式で表される<sup>1)</sup>。

$$\psi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \exp\{-at^2\} \tag{5}$$

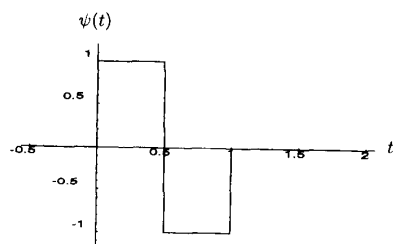


図1 Haar 関数

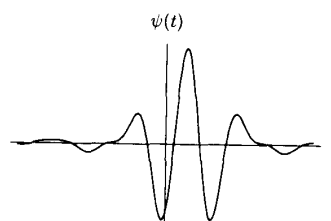


図2 Meyer 関数

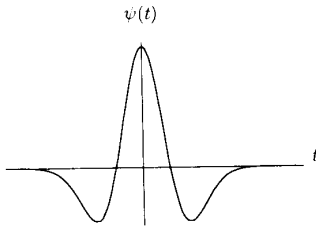


図3 Mexican 関数

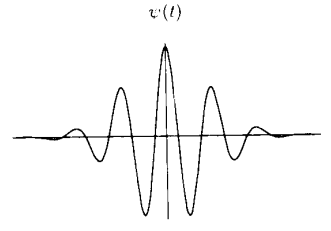


図4 Gabor 関数

図3にその波形を示す。

### 3.4 Gabor 関数

Gabor 関数は、フーリエ変換の基底に使われる指数関数  $\exp(-i\omega t)$  に Gauss 窓を掛けることによって、局在性を良くした関数であり、次式で表される。<sup>1)</sup>

$$\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{4a}\right\} \exp\{ibt\} \quad (6)$$

図4にその波形を示す。

## 4. 解析対象とする波形

前項に示した各マザー関数によって得られる解析結果の違いを比較するために、解析対象として、矩形波、単一正弦波、複合正弦波、チャープ信号を使用する。これらの式を次に示す。

$$\text{矩形波} \quad s(t) = \begin{cases} 1 & nT \leq t \leq nT + \tau \\ -1 & (n+1)T - \tau \leq t \leq (n+1)T \end{cases}$$

$$\text{単一正弦波} \quad s(t) = \sin 2\pi f_1 t$$

$$\text{複合正弦波} \quad s(t) = \sin 2\pi f_2 t + \sin 2\pi f_3 t$$

$$\text{チャープ信号} \quad s(t) = \sin 2\pi(f_4 + f_5 t)t$$

ここで、 $T$ 、 $\tau$  はパルスの繰り返し周期、パルス幅であり、 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  である。また、 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  は、周波数である。

## 5. ウェーブレット変換に及ぼすマザーウェーブレット関数の影響

図5に解析対象の例として、 $f_2 = 5\text{Hz}$ 、 $f_3 = 15\text{Hz}$  の複合正弦波を示す。ウェーブレット変換した結果について、横軸に経過時間を、縦軸は周波数（対数表示）を、周波数成分の大きさを濃淡で表示する。なお、周波数成分の大きい部分は濃く表示することにする。

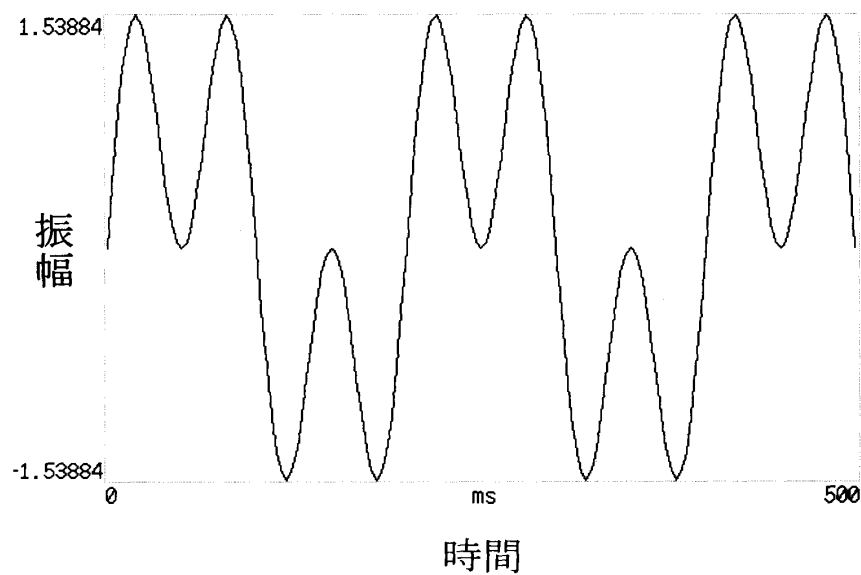


図5 複合正弦波

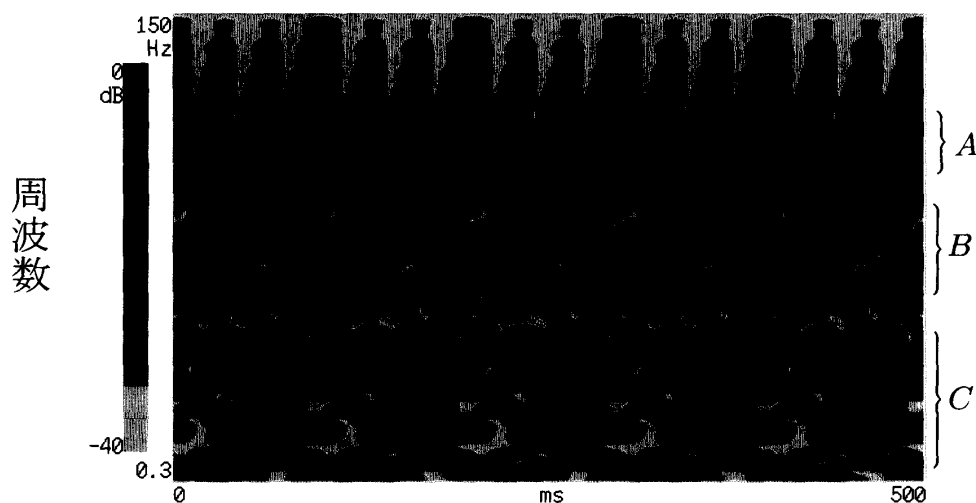


図6 複合正弦波を Haar 関数でウェーブレット変換した結果

### 5.1 Haar 関数を用いた場合

図6にウェーブレット変換した結果を示す。なお、図6～9において、約15Hzの周波数に相当する領域をA、約5Hzの周波数に相当する領域をB、低周波に相当する領域をCとする。

まず、周波数の観点から以下のことが言える。A、B、二つの領域の境界は不明確であるので、周波数の分離性が良いとは言えない。波形の周波数の真値(5Hzと15Hz)と濃淡の濃い部分の中心の周波数とが一致していない。

次に、時間の観点から以下のことが言える。A、B、二つの領域、すなわち5Hzと15Hz付近に周波数成分の強い部分が、時間経過に伴って、間欠的に分布している。詳細に見ると、Bの領域の成分が一つ発生する間に、Aの領域の成分が三つ発生しているのが確認で

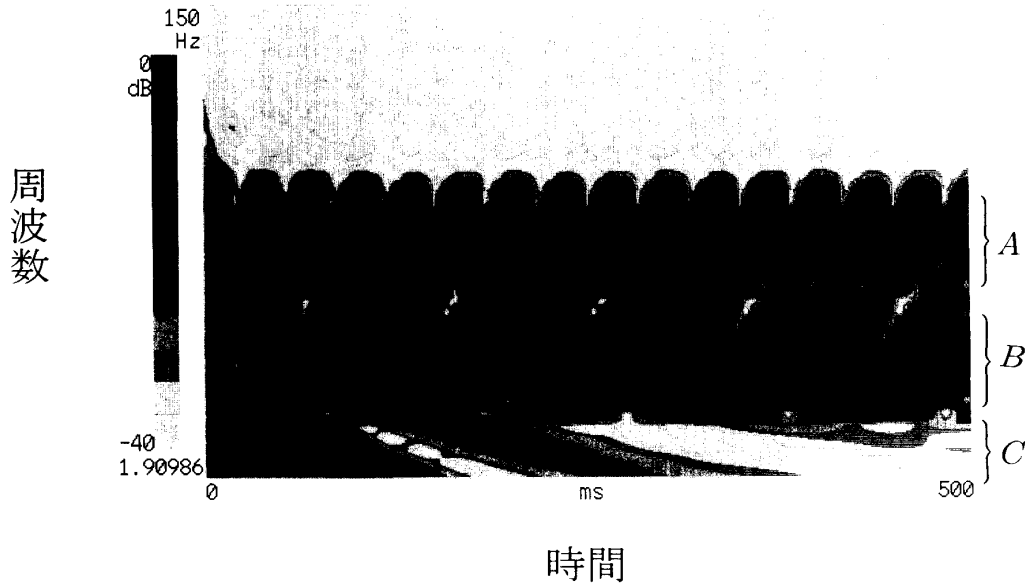


図7 複合正弦波を Meyer 関数でウェーブレット変換した結果

き、この様子は  $5\text{Hz}$  と  $15\text{Hz}$  の波形の時間変化を表している。 $A$ 、 $B$  について、時間経過に対して、右上がりの周波数発生傾向になっている。

Haar 関数を用いると、後述する他のマザー関数の場合よりも計算速度が速い。また、周波数成分の時間経過が見られるが、周波数成分の発生時刻、周波数成分の分布に関する情報が正確に得られないと言える。

なお、他のマザー関数では後述する様に、分析結果において、分析開始時刻付近における低周波部分は正確には得られないと言う現象が生じているが、そのような現象は見られない。

## 5.2 Meyer 関数を用いた場合

図7に、ウェーブレット変換した結果を示す。まず、周波数の観点から以下のことが言える。 $A$ 、 $B$ 、二つの領域の周波数は完全に分離しているので、周波数の分離性が良いと言える。また、波形の周波数の真値 ( $5\text{Hz}$  と  $15\text{Hz}$ ) と濃淡の濃い部分の中心の周波数が一致している。

次に、時間の観点から以下のことが言える。 $A$ 、 $B$ 、二つの領域、すなわち  $5\text{Hz}$  と  $15\text{Hz}$  付近の濃淡の濃い部分が、時間経過に伴って、間欠的かつ、規則的に並んでおり、 $B$  の領域の成分が一つ発生する間に、 $A$  の領域の成分が三つ発生している。

また  $A$  の領域において、濃淡の濃い部分の中心の時刻が、図5の波形において、 $15\text{Hz}$  に相当する振幅のピーク付近の時刻に対応している。 $B$  の領域についても、同様のことが言える。しかし、図7において、時間経過に対して、 $A$ 、 $B$  の各領域の全体としての広がり、は、右上がりになっている。

Meyer 関数を用いると、波形を構成する周波数成分の時間変化は見られるが、その周波

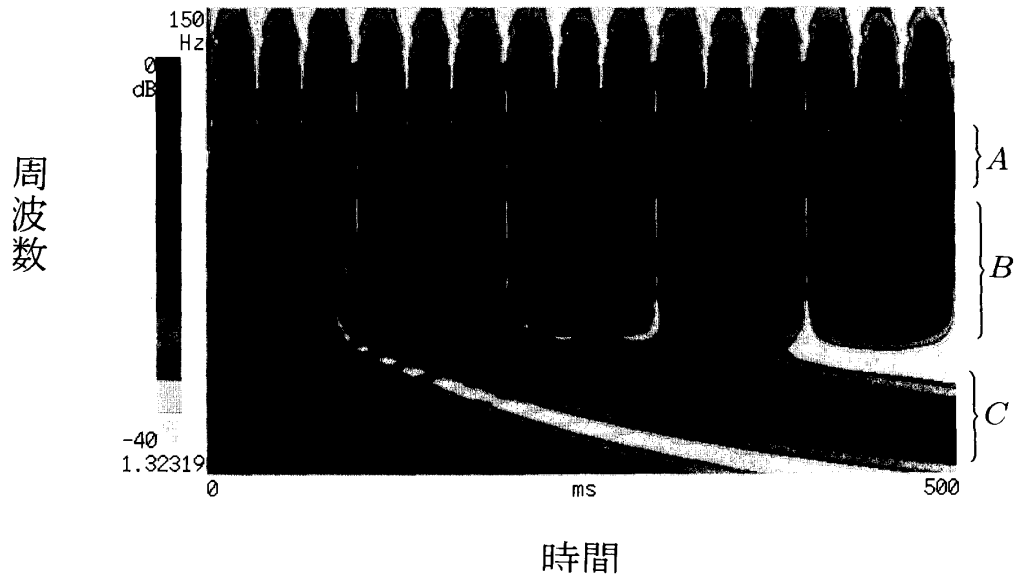


図8 複合正弦波を Mexican 関数でウェーブレット変換した結果

数成分の発生する時間情報は正確には得られないと言える。

なお、C の領域では、低周波部分でかつ分析開始時刻付近では、実際には含まれない周波数が存在する。

### 5.3 Mexican 関数を用いた場合

図8に、ウェーブレット変換した結果を示す。まず、周波数の観点から以下のことが言える。A, B, 二つの領域の境界は不明確であるので、周波数の分離性が良いとは言えない。また、濃淡の濃い部分の中心の周波数は、波形の周波数の真値(5Hz と 15Hz)と一致せず、真値よりも大きな値を示している。

次に、時間の観点から以下のことが言える。A, B, 二つの領域、すなわち 5Hz と 15Hz 付近の濃淡の濃い部分が、時間経過に対して規則的に並んでおり、B の領域の成分が一つ発生する間に、A の領域の成分が三つ発生している。

A の領域において、濃淡の淡い部分の中心の時刻が、図5の波形において 15Hz に相当する振幅の0付近の時刻に対応している。B の領域においても、同様のことが言える。

Mexican 関数を用いると、周波数の時間分離能が良く、周波数成分の発生時間に関する情報が得られると言える。

なお、C の領域では、5.2と同様の現象が生じている。

### 5.4 Gabor 関数を用いた場合

図9に、ウェーブレット変換した結果を示す。まず、周波数の観点から以下のことが言える。A, B, 二つの領域の境界は不明確であるが、濃淡の濃い部分が明確に分離されているので、周波数の分離性が良いと言える。また、波形の周波数の真値(5Hz と 15Hz)と濃

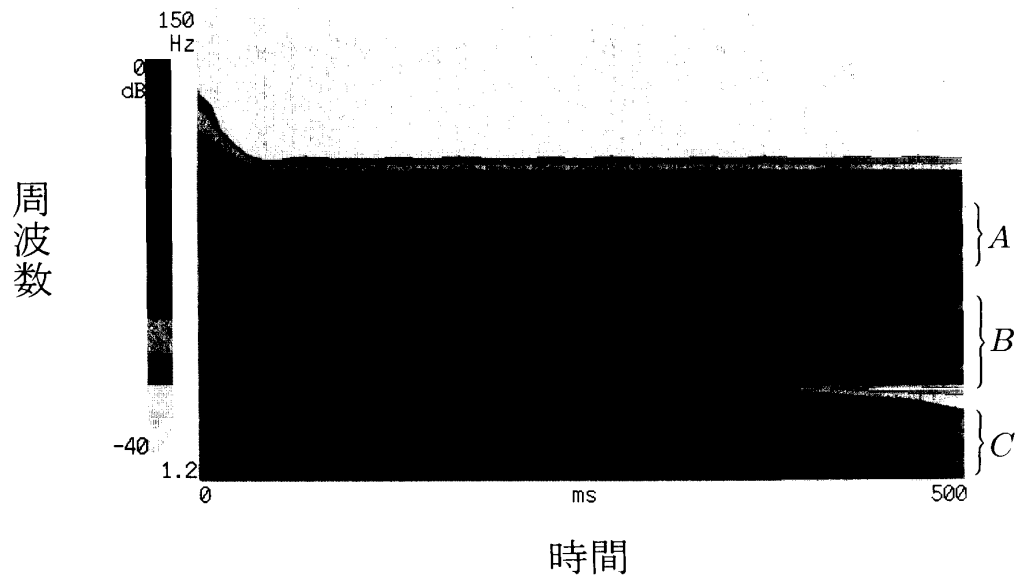


図9 複合正弦波を Gabor 関数でウェーブレット変換した結果

表1 マザー関数による特徴

マザー関数	特 徴
Haar 関数	計算処理速度が速い。 波形の分析開始時刻付近での影響が見られない。*
Meyer 関数	周波数成分の周波数的な分離性が良い 周波数の値が真値と一致する。
Mexican 関数	周波数成分の時間的な分離性が良い。 周波数成分の発生時刻が真値と一致する。
Gabor 関数	周波数成分の周波数的な分離性が良い。 周波数の値が真値と一致する。

\*他の関数では、分析開始時刻付近での低周波部分に実際に含まれない周波数成分が見られる。

淡の濃い部分の中心の周波数が一致している。

次に、時間の観点から以下のことが言える。A, B, 二つの領域, すなわち 5Hz と 15Hz 付近の濃淡の濃い部分が、時間経過に伴って、帯状に伸びている。また、高周波部分では、時間経過に伴って、濃淡の部分が観測されるようになり、時間情報を得ることができる。

なお、C の領域では、5.2, 5.3と同様の現象が生じている。

## 6. マザーウェーブレット関数の特徴

前節の結果から、ウェーブレット変換に共通して言える特徴は、(1)波形を構成する周波数成分の時間変化が見られること、(2)高周波部分では周波数成分の時間分解能が良く、低周波部分では周波数分解能が良いことである。

さらに、マザー関数の違いによる特徴を表1に示す。

以上の結果から、(1)データ量が膨大で、計算速度の短縮化が必要なときには Haar 関数

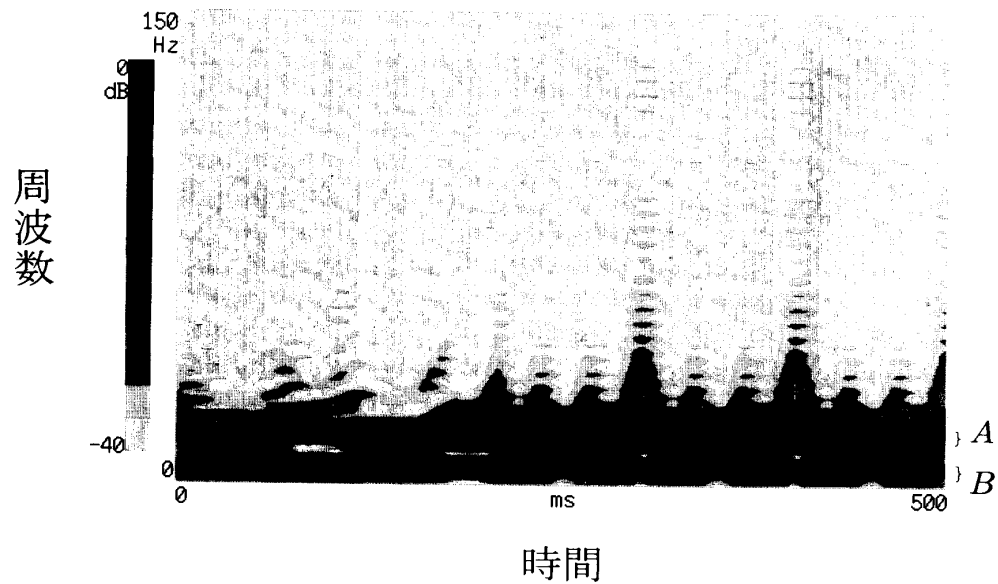


図10 複合正弦波をショートフーリエ変換した結果

を、(2)周波数情報を重視したいときには Meyer 関数を、(3)時間情報を重視したいときには Mexican 関数を、(4)時間、周波数両方の情報を得たいときには Gabor 関数を用いれば良く、目的に応じてマザー関数を使い分けるべきである。

## 7. ショートフーリエ変換との比較

通常、ショートフーリエ変換は音の分析によく用いられるので、ショートフーリエ変換とウェーブレット変換について、両者の変換の結果を比較しておく。図10に、 $f_2 = 5\text{Hz}$ 、 $f_3 = 15\text{Hz}$ の複合正弦波のショートフーリエ変換の結果を示す。

同図から以下のことが言える。ショートフーリエ変換では、A, B, 二つの領域の境界は不明確であるので、周波数の分離性が良いとは言えない。また、発生した周波数成分が時間経過に対して帯状に伸びており、周波数成分の時間的な分離性も悪いので、周波数成分の発生時刻が不鮮明である。

このことから、周波数成分の時間的な変化を見るという点においては、ウェーブレット変換がショートフーリエ変換よりも優れていると言える。

## 8. 音声分析への応用

### 8.1 マザーウェーブレット関数による比較

音声分析へのウェーブレット変換の応用を考えるために、四種類のマザー関数について変換を行い、それぞれの結果の特徴を調べる。有声音の「サ」について、図11, 12, 13, 14, 15にそれぞれ、波形, Haar 関数, Meyer 関数, Mexican 関数, Gabor 関数を使用したウェーブレット変換の結果を示す。

Haar 関数では、5.1と図12から、以下のことが言える。なお同図において、濃淡の濃い



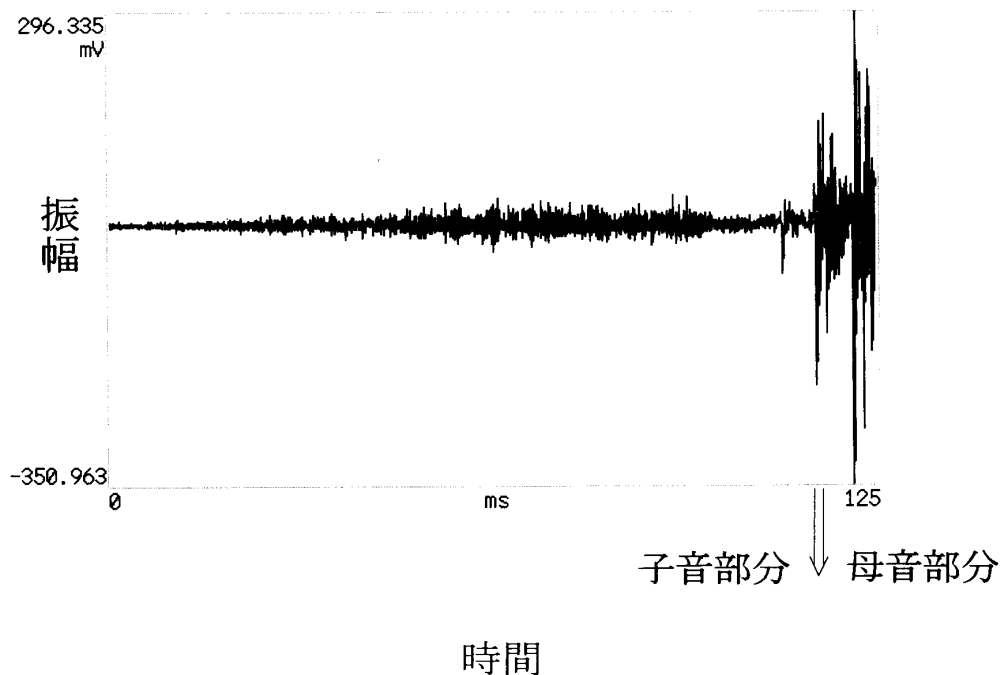


図11 有声音の「サ」の波形

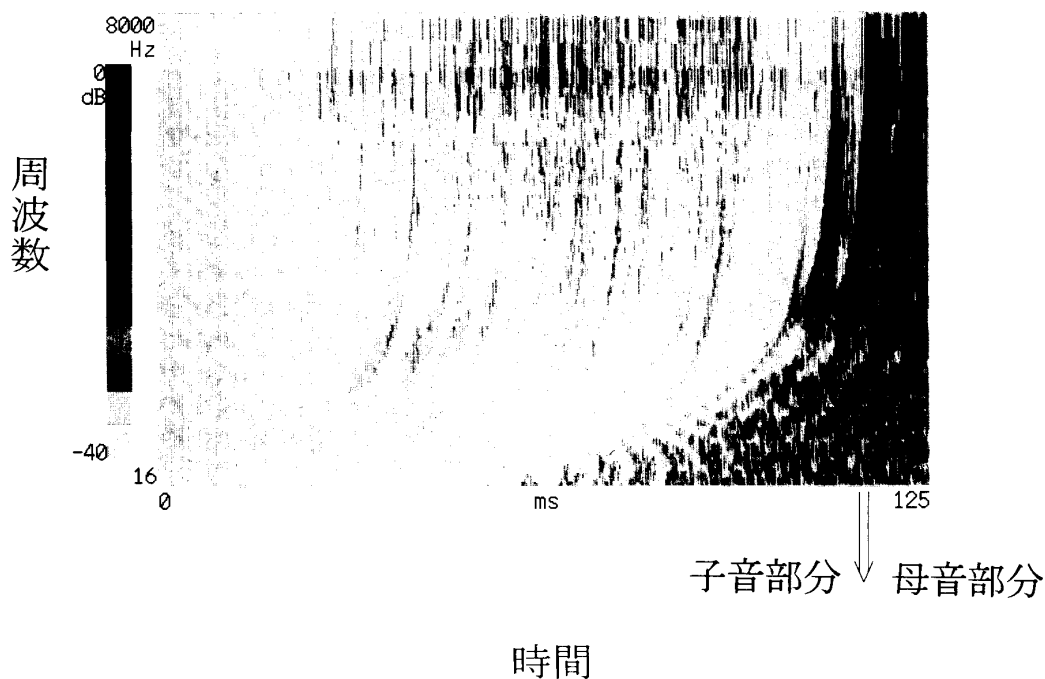


図12 有声音の「サ」を Haar 関数でウェーブレット変換した結果

部分がフォルマント周波数\*に相当する。まず、周波数の観点では、子音部分と母音部分のフォルマント分布は、正確に得られない。次に、時間の観点では、子音部分と母音部分のおおまかな区別はできる。しかし、子音部分と母音部分を詳細に区別することは、低周波部分に周波数成分の広がりが見られるので難しい。

Meyer 関数では、5.2と図13から、以下のことが言える。まず、周波数の観点では、子

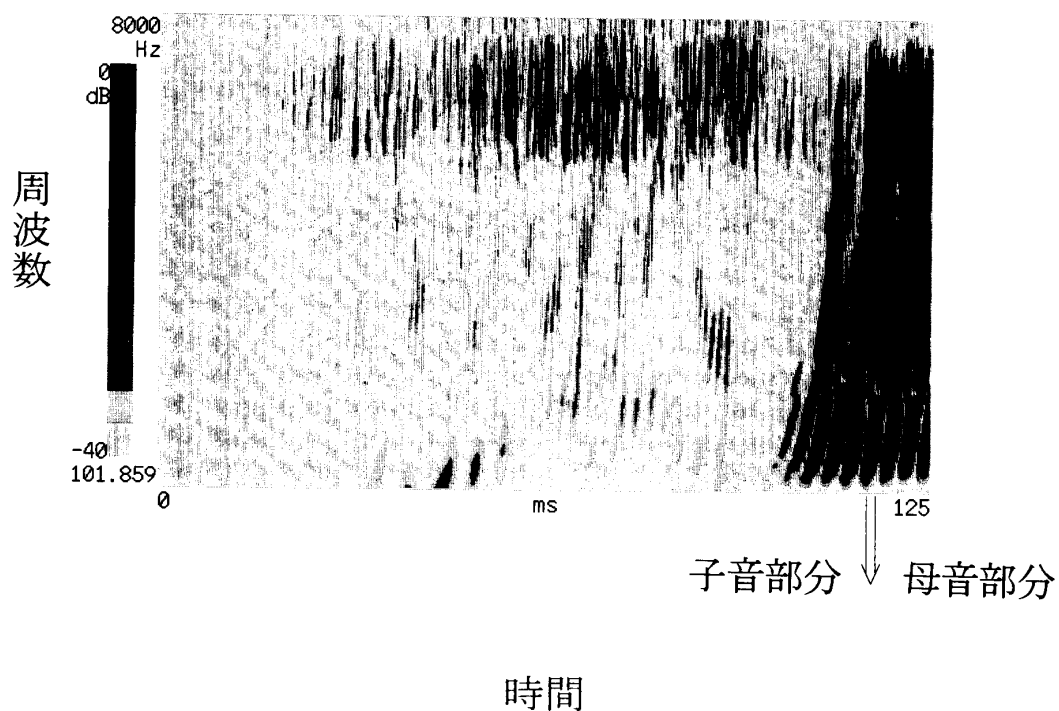


図13 有声音の「サ」を Meyer 関数でウェーブレット変換した結果

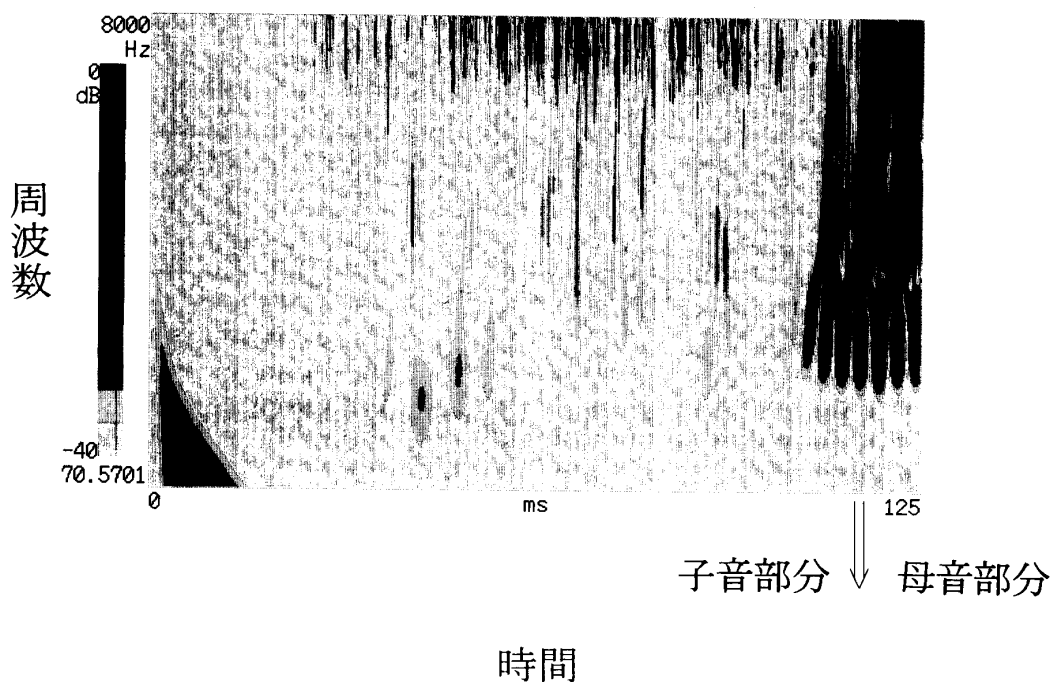


図14 有声音の「サ」を Mexican 関数でウェーブレット変換した結果

音部分のフォルマント周波数の正確な値が得られる。母音部分についても同様である。また、子音部分から母音部分への周波数成分の移行する様子が見られる。さらに経過時間に対して、発生する周波数成分が右上がりに分布しているので、子音分布と母音分布の詳細な区別は難しい。

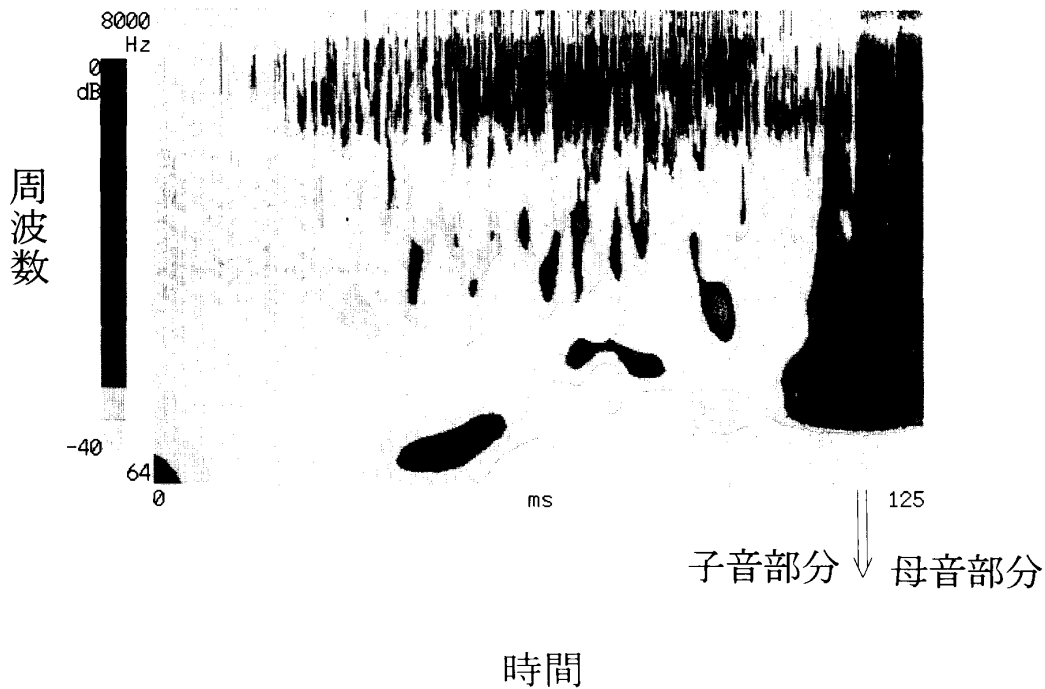


図15 有声音の「サ」を Gabor 関数でウェーブレット変換した結果

Mexican 関数では、5.3と図14から、以下のことが言える。まず、周波数の観点では、子音部分と母音部分のフォルマント分布は、正確には得られない。次に、時間の観点では、時間軸に対して、周波数成分は垂直に表示されているので、周波数成分の発生時刻が明確である。従って、フォルマント分布から、子音部分と母音部分の発生時刻を正確に得ることが出来そうである。

Gabor 関数では、5.4と図15から、以下のことが言える。まず、周波数の観点では、Mexican 関数に比べると、より真値に近いフォルマント分布が得られる。次に、時間の観点では、周波数成分の発生時刻は、Meyer 関数に比べると、より真値に近い時刻が得られる。すなわち、Gabor 関数では、フォルマント周波数の時間経過に伴う変化を見ることができ、かつ、子音部分と母音部分の区別も可能である。

しかし、成分の周波数を詳細に見る場合はMeyer 関数を、周波数成分の発生する時刻を詳細に見る場合は、Mexican 関数を使用すべきである。

\*フォルマントとは、その音声を特徴付けるパラメータであり、フォルマント周波数とは、周波数スペクトル上で特定の周波数領域にエネルギーが集中している周波数のことである。

## 8.2 ウェーブレット変換とショートフーリエ変換の比較

ささやき音の「サ」について、ウェーブレット変換とショートフーリエ変換とのそれぞれの結果を比較する。なお、ウェーブレット変換では、周波数成分の時間的な変化を調べるために、Gabor 関数を使用した。

ささやき音の「サ」について、図16に波形を、図17にウェーブレット変換した結果を、

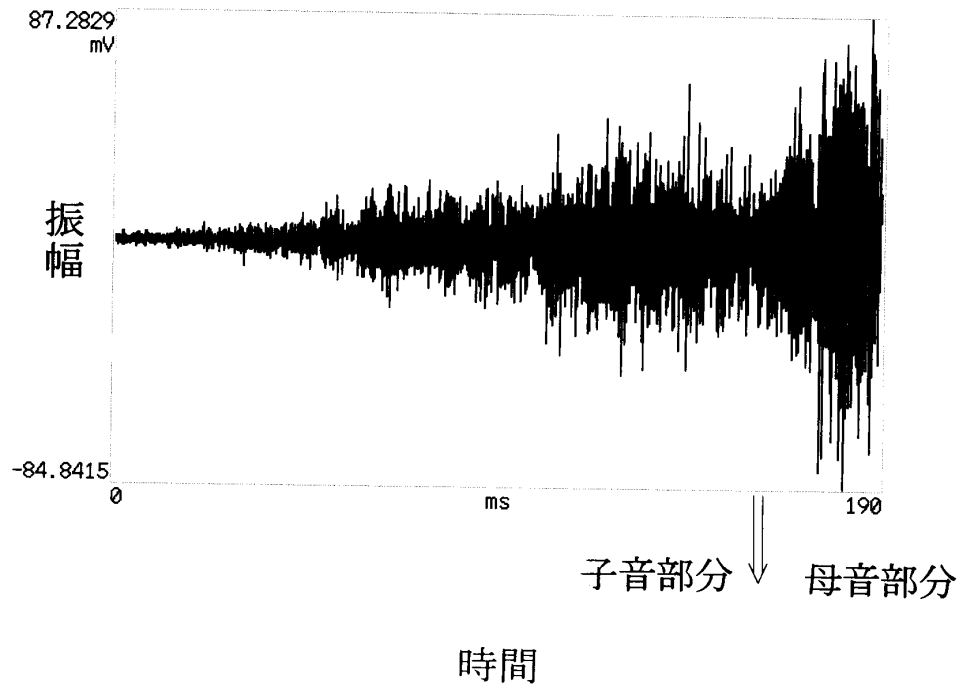


図16 ささやき音の「サ」の波形

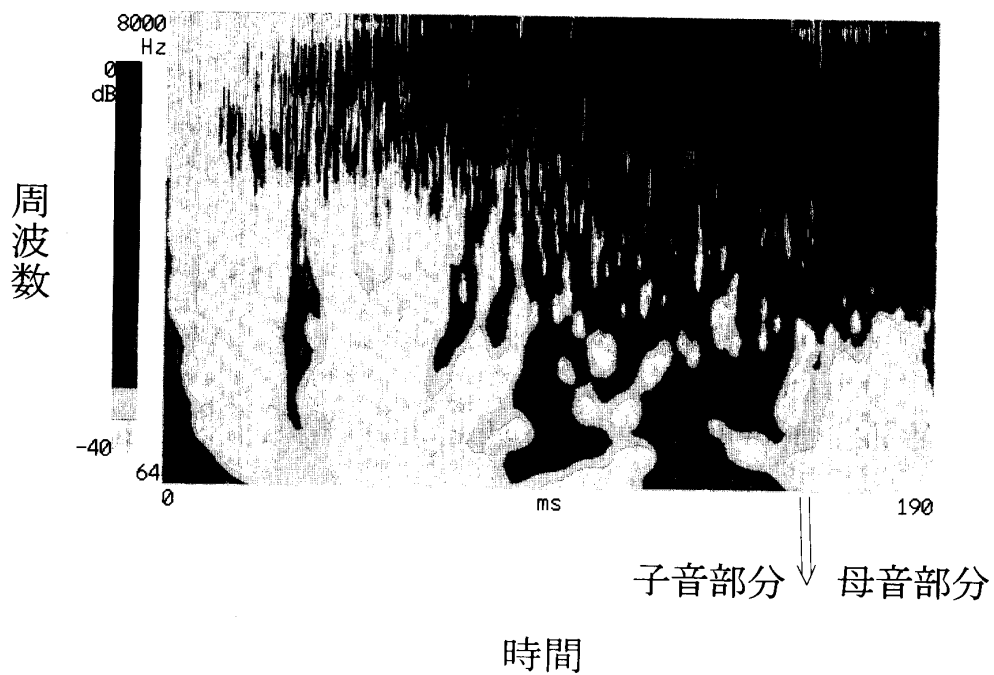


図17 ささやき音の「サ」をウェーブレット変換した結果

図18にショートフーリエ変換した結果を示す。ささやき音の場合、音声自体の雑音性が強く、子音部分と母音部分のエネルギーの強さがほぼ同じなので、周波数成分の分布だけから、子音部分と母音部分の区別は難しい。そこで、前節までの結果から、周波数成分の分布の時間経過から判断すると、ウェーブレット変換が子音部分と母音部分の区別するのに有効と思われる。このことは、図17からも確認できる。一方、ショートフーリエ変換の結

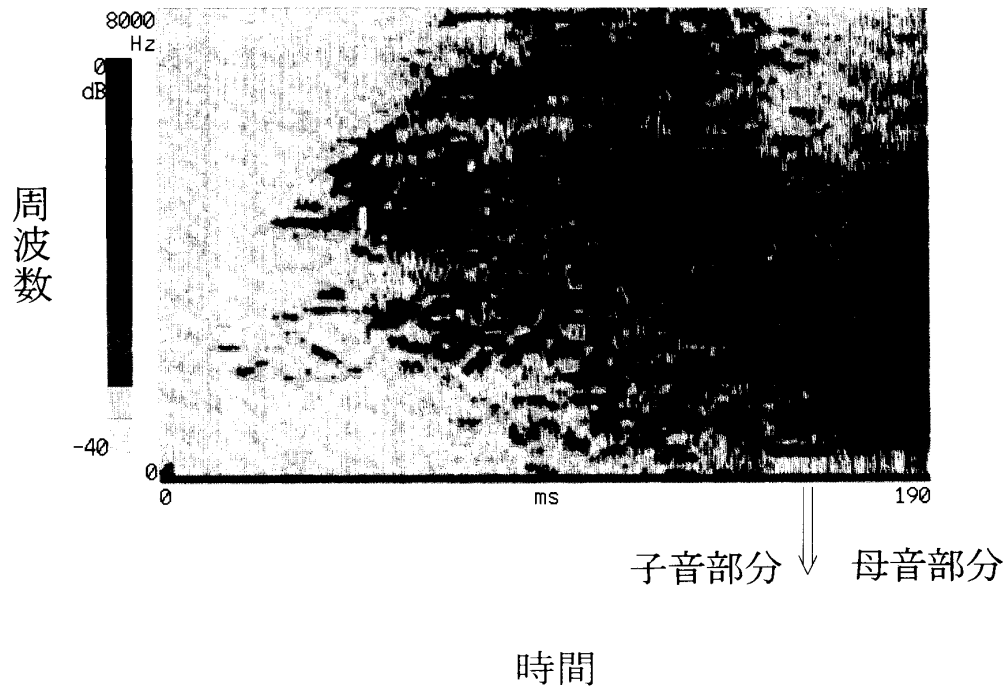


図18 ささやき音の「サ」をショートフーリエ変換した結果

果では、発生した周波数成分が経過時間に対して間延びしたような状態となっており、区別が困難になっている。

## 9. ま と め

ウェーブレット変換に及ぼすマザー関数の影響を調べた結果、計算速度の短縮化が必要ときには Haar 関数を、周波数情報を重視したいときには Meyer 関数を、時間情報を重視したいときには Mexican 関数を、時間、周波数両方の情報を得たいときは Gabor 関数を使用するのが良いと言える。

また、音声分析へのウェーブレット変換の適用法を調べた結果、時間経過に伴う周波数成分の分布を調べる場合は Gabor 関数を、さらに、子音部分と母音部分の区別を詳細に行う場合は Mexican 関数を、また、子音部分もしくは母音部分のフォルマントの分布を詳細に見る場合は Meyer 関数を使用するのが良いと言える。

以上の様に、音声分析に対してウェーブレット変換を用いた場合には、目的に応じて、マザー関数を使い分けることが有効であることがわかった。

## 参 考 文 献

- 1) 山田道夫他：第二回ウェーブレット技術セミナー（1993）

## Feature of Mother Wavelet Functions to Affect Wavelet Transform

Kazutoshi TAKAYAMA, Tsunehito HIGASHI\* and Kimio NAKAGAWA\*\*

*Graduate School of Engineering,*

*\*Department of Information and Computer Engineering,*

*\*\*Department of Electronic Engineering,*

*Faculty of Engineering,*

*Okayama University of Science,*

*Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan*

(Received October 7, 1996)

Both effect of mother wavelet functions on wavelet transform and application method of wavelet transform to sound analysis are described in this paper.

As for the former, in case that the speedup of calculation is desired Haar function, in case that greater importance is attached to frequency components Meyer function, in case that greater importance is attached to time components Mexican function and in case that both time and frequency components are checked Gabor function can be recommended for application, respectively.

As for the later, in case that the distribution of frequency components as time passes is investigated Gabor function, furthermore, in case of minutely examining the difference between consonants and vowels Mexican function and in case of fully checking the distribution of formants in consonants or vowels Meyer function can be recommended for use, respectively.

The effectiveness of properly using mother wavelet functions in sound analysis has been found as in the above.