

8の字型二重リング干渉計の光路数の導出

高 橋 伸 夫

岡山理科大学工学部情報工学科

(1996年10月7日 受理)

1. はじめに

8の字型二重リング干渉計は、光の多重周回路であるリング部分を持つ多光路干渉計である。リング部分を同じく2つ有する干渉計である双リング干渉計¹⁾が2個の方向性結合器で構成できるのに対して、8の字型二重リング干渉計は、リング部分が並列構成のため、3個の方向性結合器が必要である。

8の字型二重リング干渉計の出力強度については、散乱行列を用いてすでに報告されている²⁾。しかしながら、この場合はコヒーレント光に限られ、実用的には十分とはいえ、雑音状光等の現状の光全般には適用できない。一般性のある出力強度を求めるには、筆者らが用いている周回光路法（光が伝搬する全ての光路を考え、その光振幅を求めて出力強度を導出する手法）による必要がある³⁾。

8の字型二重リング干渉計の出力強度を上述の周回法で求めるのが最終目的であるが、紙数の関係で本論文では光路の数についてのみ考察するものである。この光路数は出力強度を導出する上で必要不可欠なものである。

2. 8の字型リング干渉計

図1に、8の字型二重リング干渉計の基本構成を示す。8の字型二重リング干渉計は、3個の光ファイバ方向性結合器（D.C と略記）を用いて構成され、光の多重周回光路であるリング部分を2個有する多光路干渉計で、図に見られるように2つの出力ポートがある。いま、上側のリングをAリング、下側のリングをBリングとし、また、2つの出力ポートを上からOUT1, OUT2とし、それぞれの出力振幅をE1, E2とする。

これらの出力端での光強度を求めるのが最終目的であるが、本論文では、まず、この干渉計の全ての光路を過不足なく分類することを考える。LDからの光がAリング、Bリングを任意周回し出射する際に通過する光路は非常に複雑で、全てをうまく数え上げるのは困難に見えるが、中央のD.C2を通過する回数に着目することによりうまく分類することができる。

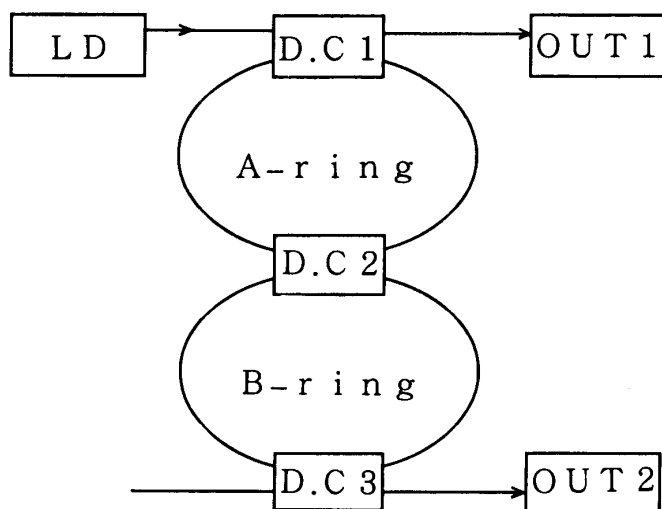


図1 8の字型二重リング干渉計

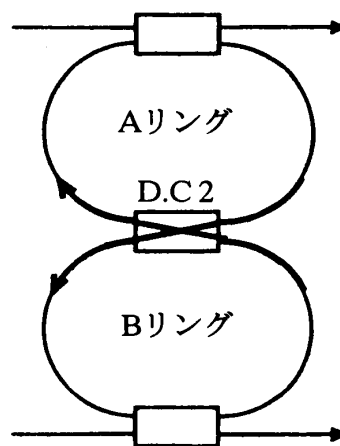


図2 往復クロスの定義

3. OUT 1 出力ポートへの光路数

最初に、出力 OUT 1 に出射した光の通過する光路について考える。

いま、D.C 2 を t 回往復クロスして、Aリングを m 周、Bリングを n 周し OUT 1 に出射した光の振幅を考える。往復クロスとは、図 2 に示すように、Aリングから Bリングへ D.C 2 をクロスして Bリングへ入り、Bリングを周回（周回数は任意）して D.C 2 を再びクロスして Aリングへ戻るときの、この D.C 2 を往復することである。この D.C 2 の往復クロス回数で光路を分類するのである。ところで、光路を表すのに、この光路を通過して出射した光の振幅 $E1_{mn}^{(t)}$ を用いる。ここで、 $E1_{mn}^{(t)}$ は Aリングを m 周、Bリングを n 周し D.C 2 を t 回クロスして OUT 1 に出射した光の振幅を表している。このように、光振幅でその通過した光路をも表すと、同じ振幅を持つ異なった光路を見落すことになるので、同一振幅を持つ光路の数を数える必要がある。同じ振幅を持つ異なる光路の一番簡単な例を挙げると、 $E1_{21}^{(1)}$ である。これは、光が Aリング→Bリング→Aリングと巡回し出射するのであるが、それぞれの周回数を順番に並べると、 $(0.5, 1, 1.5)$ 、 $(1.5, 1, 0.5)$ の 2 通りの光路がある。Aリングを先に 1 周しようが、後で 1 周しようが光の振幅は同じであるが、光路は異なるわけである。このように、往復クロス回数 t と Aリングの周回数 m 、Bリングの周回数 n が与えられるとその振幅は決まり、光振幅は 1 通りしかない。しかし、 t 、 n 、 m に対する光路は多数ある。そこで、振幅 $E1_{mn}^{(t)}$ を与える光路の個数を数えるわけである。

最初に、D.C 2 を往復クロスしない特別な場合を挙げておく。1 つは、リング部分を全く通過しない場合である。もう 1 つは、Aリングのみを周回して、Bリングを通らない場合である。この特別な場合は、各々 $E1_{00}^{(0)}$ 、 $E1_{m0}^{(0)}$ と表される。これらは、ともに 1 通りである。

以後、 $E1_{mn}^{(1)}$ 、 $E1_{mn}^{(2)}$ 、 $E1_{mn}^{(3)}$ の場合について、順次具体的に同一振幅を与える光路の個

数を数え上げ、 $E1_{mn}^{(1)}$ の一般項を導出する。

3.1 1回往復クロス光振幅 $E1_{mn}^{(1)}$ の光路数

Aリングを m 周し、Bリングを n 周し、D.C2を往復1回クロスの光の振幅 $E1_{mn}^{(1)}$ を与える光路の個数を計算する。この場合、往復1回クロスだから、Bリングに入ったら一度に n 周しなければならない。従って、取りうる光路の個数はAリングの周回の仕方のみに依存する。よって、取り扱いの便宜上、 $n=1$ として考察する。

最短光路は $E1_{11}^{(1)}$ を与える光路である。すなわち、 $(0.5, 1, 0.5)$ である。これは、1通りしかない。このように、前半のAリングで0.5周、Bリングを通過した後の後半のAリングで0.5周の、合計で1周がAリングに最低必要な周回数である。

次に、 $E1_{21}^{(1)}$ の場合は、Aリングの最低必要周回数が1であるから、 $2-1=1$ の1周分を前半のAリングに割り当てるか、後半に割り当てるかの2通りである。これは、先の例の処で述べた通りである。この様子を表3.1に示す。

よって、1回往復クロスの一般項 $E1_{mn}^{(1)}$ 対しては、 $(m-1)$ 周を前半と後半のAリングに振り分ける場合の数だけの光路数がある。これを、逐一求めて表にしたのが表3.2である。

3.2 2回往復クロス光振幅 $E1_{mn}^{(2)}$ の光路数

この場合、D.C2を2回往復クロスするから、光はAリング、Bリングともに最低2周する。従って、 $m, n \geq 2$ である。また、各リングの周回数は m, n の値によって異なっているが、巡回する順序は、 m, n に係わらず、A(1)リング→B(1)リング→A(2)リング→B(2)リング→A(3)リングである（添え字の()の数は、通過する順番を表し、例えば、A(1)リングは最初1回目通過したときのAリングを示し、A(2)リングは1度Bリングを巡ったあと2回目に周回したAリングを表している。なお、連続して何回周回したかには無関係である）。これより、Aリング、Bリングともに最低2周必要である。 $n=2$ としてAリングでの周回の仕方について考えると、 $E1_{m2}^{(2)}$ は m 周から最低必要周回数2を差し引

表3.1 $E1_{21}^{(1)}$ の各リングでの周回数

A ring	B ring	A ring
0.5	1	1.5
1.5	1	0.5

表3.2 $E1_{mn}^{(1)}$ のAリングの光路数

Aリング周回数	1	2	3	4	m
光路数	1	2	3	4	m

いた $(m-2)$ 周を A(1)リング, A(2)リング, A(3)リングの 3 つへ分配する組み合わせの数だけの光路数がある。求めた結果を, 表 3.3 に示す。その一般項は $m(m-1)/2$ である。B リングの方については, $(n-1)$ 周を B(1)リングと B(2)リングとへ分配するわけであるから, 1 回クロスの A リングの場合から類推して, $(n-1)$ 通りとなる。従って, $E1_{mn}^{(2)}$ の光路数は,

$$[E1_{mn}^{(2)} \text{ の光路数}] = m(m-1)/2 \times (n-1) \text{ 通り} \quad (3.1)$$

となる。この様子を, 表 3.4 に示している。

3.3 3 回往復クロス光技幅 $E1_{mn}^{(3)}$ の光路数

3 回クロスであるから, 2 回クロスのときに更に $\rightarrow B(3)$ リング $\rightarrow A(4)$ リングと巡回することになり, その最短光路は $(0.5, 1, 1, 1, 1, 1, 0.5)$ である。よって, A リング, B リングの最低光路数は共に 3 周で, $m, n \geq 3$ である。A リングについての組み合わせ数は, $(m-3)$ 周を 4 ケ所への割当を考えれば得られる。このときの A リング周回数 m に対する光路数の関係を表 3.5 に示した。B リングについては, $(n-3)$ 周を B(1), B(2), B(3)リング 3 つへ割り当てる場合であるから, $((n-1)-2)$ 周を 3 つへ割り当てると考えると, 表 3-3 の m を $(n-1)$ に読み替えることにより, 一般項は $(n-1)(n-$

表 3.3 $E1_{m2}^{(2)}$ の A リングの光路数

A リング周回数	2	3	4	5	m
光 路 数	1	3	6	10	$m(m-1)/2$

表 3.4 $E1_{mn}^{(2)}$ の光路数

A \ B	2	4	4	...	n
2	1	2	3	...	$n-1$
3	3	6	9	...	\vdots
4	6	12	18	...	\vdots
5	10	20	30	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	$\frac{m(m-1)}{2}$	$\frac{m(m-1)}{2} \cdot 2$	$\frac{m(m-1)}{2} \cdot 3$...	$\frac{m(m-1)}{2} \cdot (n-1)$

表 3.5 $E1_{m3}^{(3)}$ の A リングの光路数

A リング周回数	3	4	5	6	m
光 路 数	1	4	10	20	$m(m-1)(m-2)/6$

2)/2 となることが分かる。よって、 $E1_{mn}^{(3)}$ の光路数は、

$$[E1_{mn}^{(3)} \text{ の光路数}] = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad (3.2)$$

となる。このときの様子を表3.6に示す。

3.4 t 回往復クロス光振幅 $E1_{mn}^{(t)}$ の光路数

いままでに得られた往復クロス回数 $t = 1, 2, 3$ に対する光路数を表3.7にまとめている。

この結果より、一般項 $E1_{mn}^{(t)}$ の光路数を類推する。

Aリングのm周に対しては、

$$\frac{m!}{(m-t)!t!} \quad (m \geq t)$$

である。Bリングのn周に対しては、mを $(n-1)$ と読み替え、tの回数に対しても1つずれてることに注意して、

$$\frac{(n-1)!}{(n-t)!(t-1)!} \quad (n \geq t)$$

が得られる。従って、振幅 $E1_{mn}^{(t)}$ の光路数は、

表3.6 $E1_{mn}^{(2)}$ の光路数

A \ B	3	4	5	...	n
3	1	3	6	...	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$
4	4	12	24	...	\vdots
5	10	30	60	...	\vdots
6	20	60	120	...	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot 3$	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot 6$...	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

表3.7 クロス数 $t = 1, 2, 3$ に対する $E1_{mn}^{(t)}$ の光路数

往復クロス数 t	光 路 数
1	m
2	$\frac{m(m-1)}{2} (n-1)$
3	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$$[\text{振幅 } E1_{mn}^{(t)} \text{ の光路数}] = \frac{m!}{(m-t)! t!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-t)! (t-1)!} \quad (3.3)$$

$$(m, n \geq t)$$

となり、一般項が得られた。

$t = 4$ の $E1_{m4}^{(4)}$ の A リングの光路数について、式(3.3)より計算して表3.8に示した。この結果は、前節のように逐一求めた結果と一致する。

4. OUT 2 出力ポートへの光路数

OUT 2 への光路で特徴的なのは、全ての光は図3に示すように、どのような光路をとるのであれ A リング、B リングを必ず各0.5周し D.C 2 を A リングから B リング方向へ片道クロスすることである。このため、A リングの周回数 m は必ず0.5周が加わっているが、取り扱いの便宜上、この0.5周は切り捨て、 m は整数とする。これは、ガウスの括弧 $[]$ を用いて $[m]$ とすればよいが煩雑なので $[m] \Rightarrow m$ と略記するわけである。 n 周についても同様である。このように0.5周を切り捨てているため、図3の両リングのこの0.5周は0周として取り扱うことになる。次に、往復クロスについても、OUT 1 の光路と少し異なる点がある。OUT 2 の場合は、まず、B リングから D.C 2 をクロスして A リングに入り、しかる後、A リングから D.C 2 をクロスして B リングへ戻るこの2つのクロスで1回の往復クロスとなる。このように、クロスの前後が逆になるわけである。

一番簡単な光路は、往復クロスをしない光の場合、すなわち、 $E1_{mn}^{(0)}$ を与える光路である。これは A リングを m 周して D.C 2 を横切り、B リングを n 周し D.C 3 を通過して出力端 OUT

表 3.8 $E1_{m4}^{(4)}$ の A リングの光路数

A リング周回数	4	5	6	7	m
光 路 数	1	5	15	35	$m(m-1)(m-2)(m-3)/24$

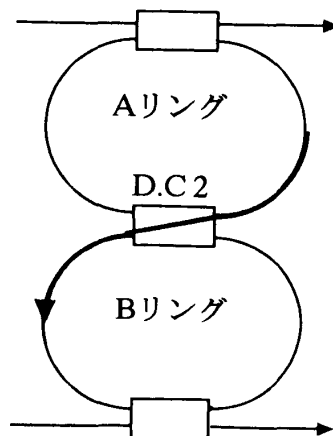


図 3 必ず通過する片道クロス光路

2へ出射する。この場合は、光路と振幅が1対1対応であるから、 $E1_{mn}^{(0)}$ を与える光路は1通りである。

前章と同様に、 $E2_{mn}^{(1)}$ 、 $E2_{mn}^{(2)}$ 、 $E2_{mn}^{(3)}$ を逐一求め、これらより一般項 $E2_{mn}^{(t)}$ に対する光路数を与える式を導く。

4.1 1回往復クロス光振幅 $E2_{mn}^{(1)}$ の光路数

このときの光路は、A(1)リング→B(1)リング→A(2)リング→B(2)リングであり、最短光路は(0, 1, 1, 0)である。このときの0は0.5周を意味している。Aリングの周回数であるm周について取り得る光路の個数は(m-1)周をA(1)リング、A(2)リング2つへ割り当てる場合で、3.1の $E1_{mn}^{(1)}$ のmと全く同じである。従って、その光路数は、表3.2を参照してmである。

Bリングのn周については、今回はmと全く同じである。従って、 $E2_{mn}^{(1)}$ の光路数は、

$$[E2_{mn}^{(1)} \text{ の光路数}] = mn \quad (4.1)$$

となる。式(4.1)から表4.1を求めた。このように、mとnは対称なのでmについてのみ述べる。

4.2 2回往復クロス光振幅 $E2_{mn}^{(2)}$ の光路数

D.C2を2回往復クロスするわけであるから、1回往復クロスに、A(3)リング、B(3)リングと周回が加わったことになり、結局2周分が各リングの最低必要周回数となる。よって、(m-2)を3ヶ所へ割り当てる場合となる。これは、 $E1_{mn}^{(2)}$ のmと同じである。よって、 $E2_{mn}^{(2)}$ の光路数は、

$$[E2_{mn}^{(2)} \text{ の光路数}] = \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \quad (4.2)$$

となる。m、nの値に対する式(4.2)の結果を表4.2にした。

表4.1 $E2_{mn}^{(1)}$ の光路数

A \ B						
	1	2	3	4	...	n
1	1	2	3	4	...	n
2	2	4	6	8	...	2 n
3	3	6	9	12	...	3 n
4	4	8	12	16	...	4 n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	m	2 m	3 m	4 m	...	m n

4.3 3回往復クロス光振幅 $E2_{mn}^{(3)}$ の光路数

4.2より類推して、この場合($m-3$)を4ヶ所に割り当てる問題であるから、 $E1_{mn}^{(3)}$ の m のときと同じである。よって、

$$[E2_{mn}^{(3)} \text{ の光路数}] = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (4.3)$$

となる。

4.4 t 回往復クロス光振幅 $E2_{mn}^{(t)}$ の光路数

往復クロス数 $t = 1, 2, 3$ に対する光振幅を表4.3にまとめてある。

$E1_{mn}^{(t)}$ の光路数の表3.7と比較すると、 m については同じである。また、 $E2_{mn}^{(t)}$ の光路数では m と n は同じ形をしている。これらのことにより、 $E2_{mn}^{(t)}$ の光路数は、

$$[E2_{mn}^{(t)} \text{ の光路数}] = \frac{m!}{(m-t)! t!} \cdot \frac{n!}{(n-t)! t!} \quad (4.4)$$

となる。

表4.2 $E2_{mn}^{(2)}$ の光路数

A \ B	2	3	4	5	...	n
2	1	3	6	10	...	$\frac{1}{2}n(n-1)$
3	3	9	18	30	...	$\frac{3}{2}n(n-1)$
4	6	18	36	60	...	$\frac{6}{2}n(n-1)$
5	10	30	60	100	...	$\frac{10}{2}n(n-1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
m	$\frac{1}{2}m(m-1)$	$\frac{3}{2}m(m-1)$	$\frac{6}{2}m(m-1)$	$\frac{10}{2}m(m-1)$...	$\frac{1}{4}m(m-1)n(n-1)$

表4.3 クロス数 $t = 1, 2, 3$ に対する光路数

往復クロス数 t	光 路 数
1	mn
2	$\frac{m(m-1)}{2} \frac{n(n-1)}{2}$
3	$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

表 5.1 光路数を求める式

$E1_{mn}^{(t)}$ の光路数	$\frac{m!}{(m-t)!t!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-t)!(t-1)!}$
$E2_{mn}^{(t)}$ の光路数	$\frac{m!}{(m-t)!t!} \cdot \frac{n!}{(n-t)!t!}$
m : A リングの周回数 n : B リングの周回数 t : D.C 2 の往復クロス数	

5. む す び

8の字型二重リング干渉計の光路数について、干渉計中央の方向性結合器 D.C 2 を通過する光路に着目して光路を分類し、2つの出力に対してそれらの光路数を求める式を導出した。

得られた結果を表 5.1 にまとめた。

このように、光路数が求まったので、各光路を伝搬する光の振幅を計算すればそれらの総和として全振幅が得られる。

入射光がコヒーレントの場合は、本論文の手法を用いて導出した出力強度式が K.Oda ら²⁾ が散乱行列を用いて求めた結果と完全に一致することを既に得ているが、これについては次回に報告する。

References

- 1) N. Sugimura, N. Takahashi, K. Yamauchi and M. Maeda : Coherent Mutiplexing of Ring Interferometric Fiber Optic Sensors, Trans of IEICE, Vol. E. **72**, No. 10, October (1989)
- 2) K. Oda, N. Takato and H.Toba : A Wide-FSR Waveguide Double-Ring Resonator for Optical FDM Trnsmission Systems, Journal of Lightwave Technolqy, Vol. 9, No. 6, pp 728-736, June (1991)
- 3) N. Takahashi : Interferometric Analysis of All-single-mode-fiber Ring Interferometers, Bulletin of Okayama Uuiversity of Science, No. **29**, A, March (1994)

Calculation of the Number of Optical Paths of 8-Shaped Double Ring Interferometers

Nobuo TAKAHASHI

Department of Information and Computer Engineering

Faculty of Engineering

Okayama University of Science

Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received October 7, 1996)

A fiber double ring interferometer uses three directional couplers and has two output ports. The ring interferometer is highly sensitive and its finesse can be varied with the value of the coupling coefficients of the directional couplers used.

In this paper, formulae describing the number of optical paths of the interferometer were derived by grouping optical paths into classes according to the number of the return trips to the coupler which linked the two ring parts. On the basis of the number of optical paths the interferometric field intensity will be derived by calculating every field amplitude emerging at the output ports which travels one of the paths in the ring interferometer.