

Ehrlich 法の初期値配置について

榊 原 道 夫・近 藤 二 郎*

岡山理科大学理学部応用数学科

*岡山理科大学大学院理学研究科

(1995年 9 月30日 受理)

1. はじめに

n 次方程式

$$p_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad (1)$$

の根を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とする。この 1 つの根を求める方法として Newton 法が有名であるが、すべての根を同時に求める方法では Durand-Kerner 法¹⁾²⁾ (以後 DK 法と記す) がよく用いられている。また 3 次収束する DK 法として Ehrlich が提案した方法⁴⁾ が実用的なプログラミングに用いられている。それらはすべて反復法である。高次の方程式の全根を求める場合、計算時間を短縮するために、反復を開始するための初期値の配置が問題となる。最も知られた方法は Aberth により与えられたもの³⁾ である。また近年、小澤により高次の場合においても計算時間を短縮できる初期値配置が提案された⁶⁾。Ehrlich 法は他の解法に比べ計算時間を多く要するという欠点がある。しかし、この欠点も小澤の初期値配置の方法を用いることにより反復回数を減らすことができる。本論文の目的は小澤の配置よりも有効な初期値配置を提案することである。数値例により我々の提案する方法は小澤の配置より反復回数が少なく計算時間を短縮できることを示す。

2. Ehrlich 法

まず、全根を求めるための方法である Ehrlich 法について簡単に説明する。Ehrlich 法の反復スキームは、適当な初期値 $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ から開始して

$$z_i^{(v+1)} = z_i^{(v)} - \frac{\frac{p_n(z_i^{(v)})}{p_n'(z_i^{(v)})}}{1 - \frac{p_n(z_i^{(v)})}{p_n'(z_i^{(v)})} \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v+1)}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v)}} \right)} \quad (2)$$

を反復して計算することによって全根を求める方法である。

この反復式を導き出す方法を説明する。式(1)を根から形成される式に変形すると

$$p_n(z) = a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_n) \quad (3)$$

となる。この方式を z で対数微分して右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{p'_n(z)}{p_n(z)} &= \frac{1}{z-\alpha_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z-\alpha_j} \\ &= \frac{1}{z-\alpha_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{1}{z-z_j} - \frac{z_j-\alpha_j}{(z-z_j)(z-\alpha_j)} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、右辺の括弧の中の第2項は第1項に比較すると小さいので無視し、 α_1 に対する式に変形すると

$$\alpha_i = z - \frac{1}{\frac{p'_n(z)}{p_n(z)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z-z_j}}$$

が得られる。この式で、 α_i を $z_i^{(v+1)}$ 、 z を $z_i^{(v)}$ 、 z_j を $z_j^{(v)}$ 、

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v)}} &\text{ を } \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v+1)}} + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v)}} \\ &\left\{ \begin{array}{l} i=1 \text{ のとき } \sum_{j=2}^n \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v)}} \\ i=n \text{ のとき } \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z_i^{(v)} - z_j^{(v)}} \end{array} \right. \text{ になる。} \end{aligned}$$

で置き換え、式を少し変形すると反復式(2)が導出できる。

収束判定は文献⁵⁾に書かれている方法を使用した。その方法について説明する。Ehrlich 法の反復(2)の目的は、 $p_n(z) = 0$ の解を求めることである。よって、 n 個すべての $z_i^{(v)}$ について $p_n(z_i^{(v)})$ が十分 0 に近くなったところで反復を終了すればよい。 $p_n(z)$ は Horner 法を使えば計算できるから、反復(2)の中で計算される $p_n(z_i^{(v)})$ に導入される誤差のおよその大きさを見積るためには、誤差の累積を Horner 法に従って追跡すればよい。その Horner 法の手順は次のように表すことができる。

$$\begin{cases} P_0 = a_0 \\ \tilde{P}_k = z_i^{(v)} \times P_{k-1} \\ P_k = \tilde{P}_k + a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (4)$$

したがって、乗算と加算において生じる丸め誤差を計算機イプシロン ϵ_M 程度と仮定して

$$\delta = 0$$

$$\begin{cases} \delta_k = \varepsilon_M \times |\tilde{P}_k| + |z_i^{(v)}| \times \delta_{k-1} \\ \delta_k = \varepsilon_M \times \max\{|a_k|, |\tilde{P}_k|, |P_k|\} + \tilde{\delta}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

つまり,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0 \\ \delta_k &= |z_i^{(v)}| \times \delta_{k-1} + \varepsilon_M \times (|\tilde{P}_k| + \max\{|a_k|, |\tilde{P}_k|, |P_k|\}) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

を式(4)と併行して計算すればよい。このとき, $p_n(z_i^{(v)}) = P_n$ が持つ誤差は次式を満たす。

$$|p_n(z_i^{(v)})| < \delta_n \quad (6)$$

すなわち, n 個の全ての根 $z_i^{(v)}, i = 1, \dots, n$ が式(6)を満たしたとき, 反復を終了する。

3. 初期値配置

Ehrlich 法の欠点である計算時間の多さも初期値をうまく配置することによって反復回数を減らすことで短縮できる。そこで, Ehrlich 法の反復回数を少なくする効率の良い初期値の設定方法について考察する。

Ehrlich 法の初期値の設定に関して Aberth の初期値, すなわち, 解の重心を中心とする全解を包含するような複素平面上の円の円周上に等間隔に初期値を設定する方法がよく用いられてきた。小澤氏がこの Aberth の初期値の問題点を指摘し, これに代わってわずかな計算量から求まり, しかも収束を速めるような初期値, すなわち, 解の重心を中心とする幾何平均半径の円周上に初期値を配置する方法を提案した (この方法を小澤の配置法と呼ぶことにする)。この方法が, 今報告されている中でおそらく最も速く収束する初期値配置の方法である。本論文では, その小澤の配置法より速く収束する初期値配置の方法を報告する。その方法は 2 重円の円周上に初期値を配置する方法である。

3.1 小澤の配置法

この方法は, 重心 β から各解 α_i までの距離を

$$r_i = |\beta - \alpha_i| \quad (i = 1, \dots, n)$$

とし, r_i に関する幾何平均半径

$$r_g = \left(\prod_{i=1}^n r_i \right)^{1/n} = |\alpha_0^{-1} p_n(\beta)|^{1/n} \quad (7)$$

を考え, この半径をもとに円を作り, その円周上に等間隔に初期値を配置するものである。初期値配置の方法は特に指定してないので, 実軸と虚軸に関してわざと対称性を持たない

ように偏角に $3/2n$ を加えて、次式のように配置する。

$$z_j^{(0)} = \beta + r_g \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

これは極端に大きい r_i や、極端に小さい r_i の影響を受けにくく中間的な値を算出し、式(1)の根の重心 β により、 $P_n(\beta)$ の値を評価することによって簡単に求めることができる。

3.2 提案する配置法

1つの円周上に初期値を配置する方法では小澤の配置法が速い。そこで、それを応用して2重の円を作り、その円周上に初期値を配置する方法について考える。この方法は式(7)の幾何平均半径 r_g から次式のような方法で円の半径を2つ求める。

$$\begin{cases} r_{g1} = r_g \times h \\ r_{g2} = r_g / h \quad (h > 0) \end{cases}$$

そして、この2重円の円周上に初期値を配置する。このとき、幾何平均値を保つように配置する。例えば、初期値の重心からの距離を r_1, r_2, \dots, r_n としたとき次式のようになる。

● 偶数の場合 ($n = 2$ のとき)

$$\sqrt{r_1 \times r_2} = \sqrt{(r_g \times h) \times (r_g / h)} = \sqrt{r_g^2} = r_g$$

● 奇数の場合 ($n = 3$ のとき)

$$\sqrt[3]{r_1 \times r_2 \times r_3} = \sqrt[3]{(r_g \times h) \times (r_g / h) \times r_g} = \sqrt[3]{r_g^3} = r_g$$

その初期値の配置の方法は実軸と虚軸に関してわざと対称性を持たないように偏角に $3/2n$ を加えて次式のように行なう。

● n が偶数のとき、

$$z_j^{(0)} = \begin{cases} \beta + r_{g1} \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] & (j = 1, 3, 5, \dots, n-1) \\ \beta + r_{g2} \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] & (j = 2, 4, 6, \dots, n) \end{cases} \quad (9)$$

● n が奇数のとき,

$$z_j^{(0)} = \begin{cases} \beta + r_{g1} \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] & (j = 1, 3, 5, \dots, n-2) \\ \beta + r_{g2} \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] & (j = 2, 4, 6, \dots, n-1) \\ \beta + r_g \exp \left[\frac{i}{n} \left(2\pi(j-1) + \frac{3}{2} \right) \right] & (j = n) \end{cases} \quad (10)$$

この方法による初期値配置を Ehrlich 法に適用すると、小澤の配置法を適用した時よりも速く収束することが期待できる。図 1, 2 はある 20 次の多項式について、小澤の配置法および提案する配置法 ($h=1.5$ のとき) の初期値配置の例である。

図 3, 4 には図 1, 2 と同じ方程式について、収束までの Ehrlich 法の反復軌道の例を示す。ここで、左上の数字は反復回数である。

●: 初期値

○: 方程式の解

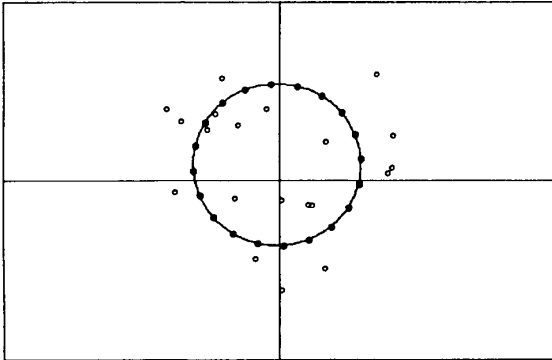


図 1 小澤の配置法の例

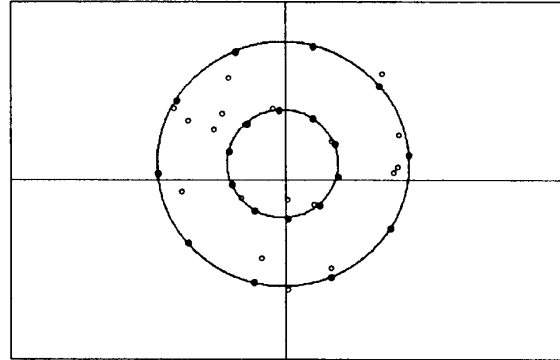


図 2 提案する配置法の例 ($h=1.5$)

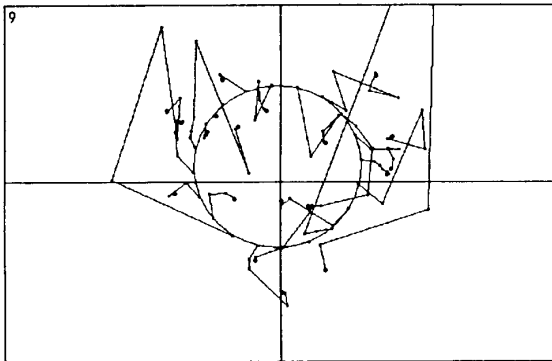


図 3 小澤の配置法を用いた場合の反復解の軌道

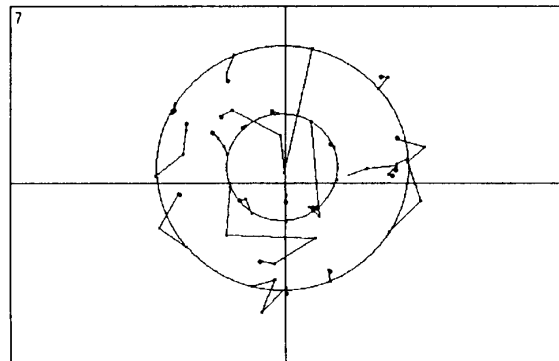


図 4 提案する配置法を用いた場合の反復解の軌道 ($h=1.5$)

表 1. 偶数次の方程式に対する反復回数の平均 (100個)

h	10次	20次	30次	40次	50次	60次	70次	80次	90次	100次
1.00	7.69	9.60	11.36	12.78	13.43	14.57	15.87	16.71	17.65	18.39
1.05	7.76	9.60	10.56	11.70	12.28	13.39	14.18	14.51	15.29	16.28
1.10	7.51	9.08	10.18	11.17	11.80	12.73	13.36	14.36	14.64	15.59
1.15	7.48	9.04	9.94	10.80	11.42	12.48	13.23	13.59	14.02	15.00
1.20	7.37	9.07	9.93	10.78	11.39	11.98	12.74	13.45	13.35	14.21
1.25	7.54	8.83	9.62	10.63	11.19	11.92	13.02	13.14	13.25	14.02
1.30	7.46	8.64	9.88	10.70	11.01	11.70	12.40	12.86	13.23	14.03
1.35	7.40	8.89	9.75	10.46	11.33	11.71	12.47	13.01	13.24	13.99
1.40	7.30	8.86	9.70	10.64	11.33	11.93	12.52	12.78	13.23	13.80
1.45	7.18	8.78	9.80	10.50	11.00	11.93	12.65	13.17	13.58	14.05
1.50	7.52	8.79	9.77	10.74	11.31	11.81	12.50	12.96	13.53	14.05
1.55	7.52	8.73	9.63	10.67	11.43	12.02	12.80	13.29	13.62	14.40
1.60	7.38	8.80	9.69	10.95	11.41	12.06	12.72	13.29	13.93	14.49
1.65	7.43	8.79	9.63	10.55	11.46	12.30	12.90	13.62	14.07	14.78
1.70	7.41	8.98	9.75	10.88	11.33	12.18	13.14	13.72	14.05	14.71
1.75	7.50	8.73	10.15	10.80	11.59	12.47	13.30	13.98	14.53	15.34
1.80	7.47	8.89	10.18	11.03	11.97	12.61	13.50	14.12	15.03	15.35
1.85	7.53	8.84	10.49	11.01	12.06	12.88	13.89	14.51	15.18	15.98
1.90	7.55	8.85	10.10	11.10	12.06	13.20	14.02	14.78	15.54	16.28
1.95	7.63	8.92	10.14	11.49	12.22	13.25	14.31	15.10	15.75	16.60
2.00	7.58	9.33	10.30	11.60	12.41	13.60	14.52	15.28	16.23	17.09

表 2. 奇数次の方程式に対する反復回数の平均 (100個)

h	15次	25次	35次	45次	55次	65次	75次	85次	95次	105次
1.00	8.97	10.27	11.84	12.98	14.22	15.16	16.15	17.30	18.28	19.14
1.05	8.63	9.95	10.97	11.66	12.39	13.55	14.24	15.27	16.17	17.26
1.10	8.63	10.02	10.51	11.31	12.09	12.99	13.73	14.56	15.18	15.66
1.15	8.45	9.66	10.42	11.27	11.71	12.77	13.44	14.21	14.45	14.95
1.20	8.35	9.27	10.23	10.99	11.47	12.37	12.99	13.79	13.91	14.83
1.25	8.39	9.28	10.35	11.01	11.28	12.36	12.76	13.49	13.80	14.27
1.30	8.20	9.27	10.13	10.85	11.52	12.17	12.35	13.30	13.41	14.59
1.35	8.15	9.22	9.95	10.64	11.46	12.18	12.75	13.14	13.71	14.59
1.40	8.32	9.26	9.92	10.90	11.42	12.09	12.59	13.30	13.66	14.43
1.45	8.19	9.21	10.09	10.84	11.48	12.13	12.73	13.31	13.62	14.37
1.50	8.24	9.27	9.99	11.16	11.18	12.41	13.03	13.69	13.75	14.58
1.55	8.33	9.31	10.29	10.57	11.59	12.33	13.08	13.38	14.15	14.76
1.60	8.39	9.17	10.16	10.96	11.57	12.36	13.15	13.51	14.04	15.03
1.65	8.30	9.37	10.15	11.01	11.66	12.54	13.09	13.95	14.34	15.16
1.70	8.34	9.47	10.13	10.95	11.80	12.57	13.21	14.12	14.47	15.06
1.75	8.26	9.47	10.44	11.06	11.88	12.73	13.48	12.24	15.01	15.68
1.80	8.37	9.31	10.47	11.27	12.18	13.11	13.85	14.54	15.17	15.97
1.85	8.27	9.51	10.72	11.42	12.21	13.33	14.07	14.66	15.62	16.24
1.90	8.29	9.52	10.83	11.46	12.47	13.36	14.33	15.05	15.82	16.84
1.95	8.29	9.69	10.87	11.89	12.83	13.45	14.65	15.30	16.32	17.04
2.00	8.62	9.71	11.00	11.99	13.04	13.87	14.98	15.80	16.75	17.57

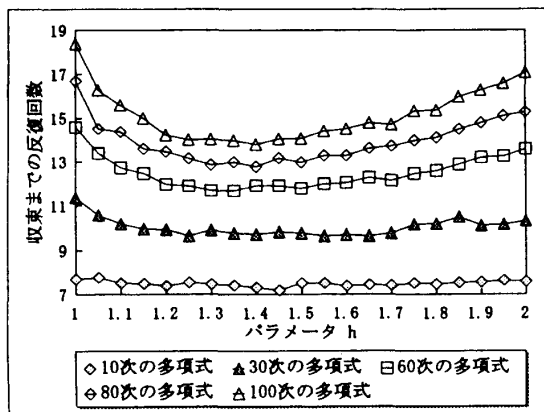


図5 偶数次の方程式に対する各パラメータの反復回数

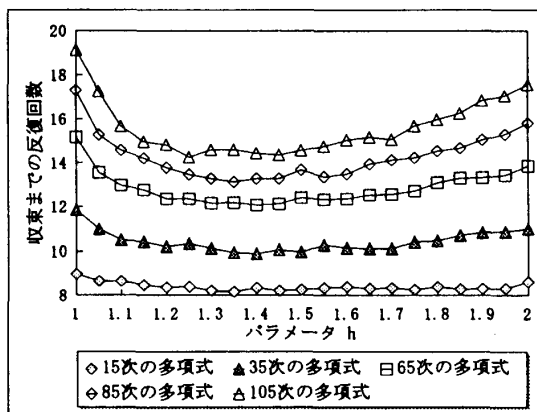


図6 奇数次の方程式に対する各パラメータの反復回数

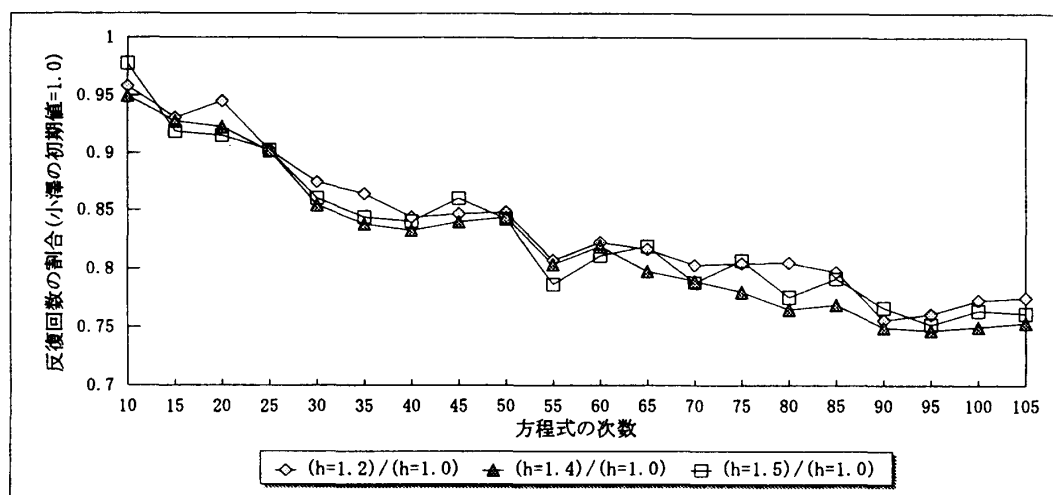


図7 小澤の初期値に対する今回の方法による反復回数少の割合

4. 数 値 例

数値データとして複素平面上の領域 $|-1,1| \times |-1,1|$ に100組の複素解の実数部と虚数部をランダムに発生させる。それらの解より多項式の係数を生成し、小澤の配置法と提案した配置法を Ehrlich 法に適用して計算した結果を一タとしてまとめる。パラメータ h を $1 \leq h \leq 2$ ($h=1$ のとき小澤の配置法に対応する) としてデータを取った。それを表にしたのが表1, 2になる。

表1, 2からわかるように n が偶数, 奇数の場合に関係なく, 確実に小澤の配置法より提案した配置法が速く収束している。パラメータの選び方にもよるが, 提案した配置法は小澤の配置法よりも良い初期値配置の方法であることが理解できる。ここで, この表の幾つかの場合をとり挙げて, パラメータ h に対する反復回数の変化をわかりやすくしたグラフを図5, 6に示す。

図5, 6からわかるように, 次数が低い時はほとんど小澤の配置法と反復回数は変わら

ないが次数が高くなるに伴い、パラメータ h がおよそ 1.2~1.5 の間で平均的に速く収束する。ここで、小澤の配置法に対して提案した方法における反復回数の減少の割合を幾つかのパラメータについてグラフにしたものを図 7 に示す。このグラフは、あるパラメータでの反復回数の平均を小澤の配置法での反復回数の平均で割ったものである。

図 7 からわかるように、提案した方法は、小澤の初期値に対して、高次になるほど反復回数の減少率が大きくなることがわかる。例えば、25 次の場合減少率は約 1 割であるが、100 次の場合には約 2.5 割の減少を実現している。

5. 結 論

初期値を設定する新たな方法として根の重心が中心となる 2 重円の円周上に幾何平均値が保存されるよう配置した。数値実験より提案した配置法は、パラメータ h が 1 以上 2 以下では小澤の配置法より収束までの反復回数が少なく、次数が低い場合反復回数はほとんど h に依存しないが、高次になればなるほど 2 重円にした効果が顕著となることがわかった。また、1.2 と 1.5 の間ではほとんど反復回数の変化がなく、方程式の次数に関係なくおよそ 1.4 で反復が近似的に最少となっている。このことから、提案した配置法は簡単であり、高次の多項式になるほど有効であることがわかった。

参 考 文 献

- 1) E. Durand, Solutions Numériques des Équations Algébriques. Tome I : Équations du Type $F(x) = 0$; Racines d'un Polynôme, Masson, Paris, 1960.
- 2) I. O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynome, Numer. Math, **8**, 290—294, 1966.
- 3) O. Aberth, Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomial Simultaneously, Mathematics of Computation Vol. **27**, 339—344, 1973.
- 4) L. W. Ehrlich, A Modified Newton Method for Polynomials, Communications of the ACM Vol. **10**, 107—108, 1967.
- 5) 森正武, FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 岩波コンピュータサイエンス, 215—235, 1990.
- 6) 小澤一文, Durand-Kerner 法の効率的な初期値の簡単な設定法, 日本応用数学会論文誌, Vol. 3 No. **4**, 173—186, 1993.

Initial Values for Ehrlich method

Michio SAKAKIHARA and Jiro KONDO*

Department of Applied Mathematics,

**Graduate School of Science,*

Okayama University of Science,

Ridai-cho 1-1, Okayama 700, Japan

(Received September 30, 1995)

The aim of this paper is to present a new method to set initial values for the Ehrlich method which is an iterative solution to seek all roots of a univalent algebraic equation, simultaneously. The origin of this study was considered by Aberth of which the result is called Aberth's initial values. In order to reduce the number of iteration and the CPU time Ozawa proposed a new method to set initial values with the geometrical radius of roots. We propose an improved method of Ozawa's initial values. From numerical results, it is shown that the efficiency of the present method is to be better than Ozawa's initial values as the degree of equation becomes higher.